ALBARÁN DE ENTREGA DE DOCUMENTO

U. SEVILLA. BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
Servicio de Préstamo Interbibliotecario
Edif. Rector Machado. Avda. de la Guardia Civil, s/n
41013 Sevilla ()
tel: 954551133 fax: 95 4551135
pi@us.es
Nif: Q-4118001-I

Centro solicitante:
SOUTHERN METHODIST UNIVERSITY. Fondren Library East (-ISM)
ILL, Fondren Library Center/
SMU, Fondren Library Center, 6414 Robert S. Hyer Lane
Dallas, TX 75275-0135 US
214-768-2328 - Fax: 214-768-1842 - Mail: ILLlending@mail.smu.edu

Petición: **24804693**
Fecha entrega: 09-09-2019

Datos del documento:

Su referencia: **197824914**
Número de fotocopias: **21**
(E)
M. Majumdar, T. Mitra. Decentralizacion Intertemporal. Cuadernos econo?micos de i.c.e.. 1990. Madrid : Ministerio 46 p 61-101-101. ISSN/ISBN: 0210-2633

El documento se envia electrónicamente

Datos administrativos:

Total a pagar: 20.00 IFM.

Descentralización intertemporal*

Mukul Majumdar**
Tapan Mitra**

Cornell University, Ithaca, New York

I. Introducción

El problema de alcanzar una asignación óptima de recursos en una economía descentralizada con horizonte infinito y con agentes de vida infinita vivos ha sido planteado repetidamente en la literatura. Inicialmente, los estudios de Malinvaud (1953) y Samuelson (1958) (una valoración reciente se puede ver en Malinvaud (1987)) indicaban que, incluso en una economía «clásica» con horizonte infinito, un programa competitivo puede ser ineficiente o no-óptimo en el sentido de Pareto. Sólo recientemente se ha estudiado formalmente el problema de la descentralización de la información en economías infinitas, utilizando conceptos de la literatura sobre mecanismos de diseño de asignación de recursos. En esta revisión, ofrecemos una exposición de los principales resultados en el marco de un modelo agregativo. Desprovisto de tecnicismos, este modelo parece ofrecer uno de los marcos más simples para aislar las características de una economía dinámica que son críticas a la hora de limitar las posibilidades de descentralización de la toma de decisiones. A lo largo del presente artículo impondremos condiciones restrictivas para facilitar la presentación de los resultados en su forma más simple y clara.

En la Sección II recogemos algunos conceptos básicos de la literatura sobre la teoría de los mecanismos. La definición formal de un mecanismo que conviene usar en nuestro contexto se debe a Mount y Reiter (1974) y, para nosotros, se interpreta mejor en términos de un *escenario de verificación.* En la Sección III se recuerdan algunos resultados básicos de la literatura sobre asignación intertemporal. Se exponen las condiciones bajo las cuales se puede mostrar que existen los programas que son «óptimos» de acuerdo a algun criterio de valoración (objetivo social). En la Sección IV examinamos la relación entre esos programas óptimos y aquellos que pueden ser «apoyados» por precios «competitivos» o «sombra», postulando una versión apropiada de una «condición de transversalidad».

Estos últimos resultados nos llevan a una discusión sobre la posibilidad de alcanzar programas infinitos óptimos de una manera «descentralizada». En efecto, nuestro punto de partida es la valoración de la distribución de Malinvaud (1953) por Koopmans (1957). Koopmans advirtió que la típica condición de «transversalidad» que es suficiente para garantizar la eficiencia de los

---

* Artículo original para Cuadernos Económicos de ICE. Traducción de Fernando Martín Aymerich.

** Quisiéramos agradecer a Venkatesh Bala, Swapan Dasgupta, Leonid Hurwicz, Lionel Mckenzie, Roy Radner, Debraj Ray y Stanley Reiter sus valiosos comentarios.

programas competitivos no era «descentralizable». En la Sección IV, revisamos los resultados recientes que indican que en un marco estacionario se puede identificar la optimalidad de los programas competitivos a través de una secuencia de verificaciones período a período en lugar de la condición de transversalidad asintótica. Los mensajes adicionales o las condiciones que pueden caracterizar los programas competitivos óptimos dependen de la estructura del modelo particular. En la Sección V exponemos condiciones alternativas de verificación período a período que caracterizan también la optimalidad de los programas competitivos; esta caracterización es nueva. En la Sección VI discutimos formalmente mecanismos descentralizados intertemporales y ofrecemos ejemplos de algunos mecanismos que pueden alcanzar el objetivo social de optimalidad utilizando los resultados de las Secciones III y V. En la Sección VII consideramos marcos no estacionarios donde el productor tiene información incompleta sobre la evolución futura de la tecnología, y damos un resultado de imposibilidad sobre la consecución de las asignaciones óptimas mediante cualquier mecanismo en este marco.

En un marco estático, si un subastador comienza con un mensaje de «equilibrio» se puede visualizar a los participantes respondiendo a ese mensaje «rápidamente», y se puede llevar a cabo la correspondiente asignación de equilibrio (decisiones de «acción» o de cantidad). En una economía con horizonte infinito, no se puede «juntar» a todos los agentes para verificar las condiciones de equilibrio como respuesta a un mensaje propuesto. Así, incluso si comenzamos con un mensaje de equilibrio, si se requiere la respuesta de todos los agentes antes de que se efectúen las asignaciones, ¡no se produce absolutamente ninguna acción! Esta dificultad ha conducido al reciente desarrollo del concepto de «procesos evolutivos» en los que las decisiones de consumo/inversión se efectúan período tras período sobre la base de reglas de comportamiento que no requieren comunicación con futuros agentes («todavía no nacidos»). En la Sección VIII, revisamos brevemente esta área relativamente poco estudiada. Por último, figuran algunas referencias bibliográficas.

Radner (1973, pág. 188) ha observado que «podemos pensar en la descentralización como un caso especial de división del trabajo, donde el "trabajo" en cuestión es el de la toma de decisiones». El organizador puede considerar a los miembros de la organización como «máquinas», que reciben mensajes como inputs y producen mensajes como outputs. «Además de esto, el organizador puede utilizar también miembros para *producir estrategias* e incluso *modificación de la organización*». Visto de este modo, «una organización está *descentralizada en información* hasta el punto que los diferentes miembros tienen diferente información, y *descentralizada en autoridad* hasta el punto que se espera (por el organizador) que los miembros individuales elijan estrategias y/o modifiquen las reglas del juego». El alcance del presente ensayo es muy limitado: nosotros no consideramos cuestiones relacionadas con la descentralización en autoridad o con incentivos a seguir reglas específicas del juego. En nuestro modelo, a los agentes se les da unas reglas específicas para verificar determinadas condiciones de equilibrio «miopes». Nuestra primera tarea consiste en averiguar hasta dónde una secuencia de tales verificaciones a corto plazo basada en información limitada puede alcanzar algunos objetivos a largo plazo.

II. Mecanismos descentralizados de asignación de recursos

El desarrollo de un marco teórico que sea suficientemente amplio para evaluar y comparar sistemas económicos alternativos ha sido una motivación primaria dentro de la investigación sobre mecanismos de asignación de recursos. El punto de partida para muchas direcciones es el modelo walrasiano de equilibrio y el proceso con subastador y tanteo «(tatonnement») que describe una fase de intercambio de mensajes hasta la consecución de un equilibrio. En un esquema «clásico» (ausencia de externalidades, indivisibilidades y rendimientos crecientes, etc.) se han elaborado suficientes condiciones para la existencia de tal equilibrio, de forma que un equilibrio resulta ser óptimo de Pareto e insesgado. Sin embargo, hasta el punto que las indivisibilidades y los rendimientos crecientes juegan un importante papel en una economía particular, uno se debe enfrentar a la cuestión de cómo organizar mejor la asignación de recursos en tales situaciones para encontrar estándar específicos de actuación.

También se han señalado las dificultades para alcanzar un equilibrio a través de un «tatonnement». Los ejemplos de Scarf (1960) y Gale (1963) muestran que un «tatonnement» necesita no converger en absoluto o necesita no converger a un equilibrio «justo». En efecto, en una formulación discreta temporal se pueden construir ejemplos de «tatonnement» que muestran caos topológico y caos ergódico «robustos» en un tipo de economías con sólo dos bienes (Bala y Majumdar, 1990). Además, ya que no se puede producir comercio fuera del equilibrio, si la convergencia no ocurre en tiempo finito, no es posible ningún comercio en tiempo finito (ver Arrow-Hahn, 1971). Todo esto ha estimulado conceptos de equilibrio no-walrasianos así como procesos de no-tatonnement (para una reciente muestra, véase Mukherji, 1990).

Otra característica destacada del modelo walrasiano es la naturaleza «descentralizada» de la toma de decisiones que, se afirma, «utilice incentivos» y alcance «economías de manipulación de la información». Mientras que, desde el debate sobre el socialismo de mercado, se ha dispuesto de excelentes exposiciones informales de los diferentes aspectos relacionados, el análisis axiomático riguroso de numerosos aspectos ha sido la principal tarea y logro de lo que se ha llamado la «nueva Economía del Bienestar» (Reiter, 1986). Expondremos ahora algunas definiciones formales (siguiendo a Mount y Reiter, 1974) relacionadas con los mecanismos de asignación de recursos. A esto le seguirá una discusión algo informal de los diversos conceptos implicados.

Consideramos los siguientes elementos: *un conjunto de agentes*, **I**, *un conjunto de marcos*, $\mathbf{E} \subset \prod_{i \in I} E_i$ (donde E_i es el conjunto de entornos del agente $i \in I$), y un *espacio de asignaciones*, **A**.

Un *mecanismo*, π, es una tripleta $(\mathbf{M}, \psi, \mathbf{H})$ donde:

(a) **M**, llamado el espacio del mensaje, es un conjunto de mensajes admisibles.

(b) ψ, llamada la *correspondencia de equilibrio*, es una aplicación desde **E** hasta **M**, tal que $\psi(\mathbf{e})$ es no vacío para cada $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$.

(c) **H**, llamada la *función de resultados*, es una aplicación desde **M** hasta **A**.

Dado un mecanismo π, la *correspondencia de realización*, ϕ, una aplicación desde **E** hasta **A**, definida por

$$\phi(e) = \{H(m) : m \in \psi(e)\}$$

Una *correspondencia de objetivo social*, Q, es una aplicación desde **E** hasta **A**, tal que $Q(e)$ es no vacía para cada **e** en **E**.

Un mecanismo π cumple el objetivo social Q si $\phi(e) \subset Q(e)$ para todo $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$. Es *insesgado* con respecto al objetivo social Q si $\phi(e) \supset Q(e)$.

Un mecanismo $\pi = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{H})$ *preserva la intimidad* si existe la correspondencia ψ_i desde E hasta **M** para $i \in I$, tal que

$$\boldsymbol{\psi}(e) = \bigcap_{i \in I} \psi_i(e_i)$$

para cada **e** en **E**. (Es decir, $\boldsymbol{\psi}$ es una «correspondencia de coordinación»). Un mecanismo que preserva la intimidad se llamará *mecanismo descentralizado*. En lo sucesivo sólo trataremos con mecanismos descentralizados.

Dadas las definiciones formales, podemos volver a la discusión de cómo se supone que opera un mecanismo descentralizado: a esto nos referimos como el *escenario de verificación*. Parafraseando a Hurwicz (1986), los participantes en la economía son presentados con un mensaje propuesto m en **M**. El agente i acepta el mensaje (dice sí) si y sólo si m está en (e_i). Nótese que la respuesta del agente i depende solamente del mensaje recibido y la información sobre su propia característica, e_i, en lugar del entorno completo, **e**. Esta propiedad de «preservar la intimidad» es una parte esencial de la descentralización de la información, un aspecto que deseamos enfatizar en este estudio. Un mensaje m es declarado un *mensaje de equilibrio* si y sólo si cada agente acepta el mensaje; es decir, m está en $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{e})$.

Hacemos ahora dos breves notas acerca del «mensaje de equilibrio» discutido en el párrafo anterior. Primero, si m no está en $\psi_i(e_i)$, el agente i rechaza el mensaje (dice no). En este caso, se debe proponer un nuevo mensaje y el proceso continúa hasta que se encuentra uno para el que todo el mundo dice sí. La forma en que se puede encontrar un mensaje de equilibrio es un aspecto de considerable importancia. Sin embargo, no lo trataremos aquí directamente. (Para discusiones sobre los procesos de ajuste de mensajes, utilizando «funciones de respuesta» de los agentes, originando un mensaje de equilibrio en el límite, ver Hurwicz, 1986).

En segundo lugar, merece la pena señalar que en esta interpretación de cómo opera el mecanismo existe un papel limitado del agente, principalmente al aceptar o rechazar un mensaje propuesto, dadas las correspondencias ψ_i. La elección de estas correspondencias como resultado de la búsqueda del propio interés (compatibilidad de incentivos) es un tema que ha sido estudiado con detalle en la literatura. De nuevo, en adelante no nos ocuparemos de este aspecto. (Para estudios en los que la compatibilidad de incentivos significa que las funciones de respuesta de los agentes tienen que constituir un punto de equilibrio de Nash de un juego no cooperativo, ver Hurwicz, 1972).

Continuamos ahora con nuestra discusión sobre cómo opera el mecanismo. Si m es un mensaje de equilibrio, entonces la función **H** especifica una asignación de equilibrio, $\mathbf{H}(m)$, de esta economía, como resultado de este mecanismo. Así, se entiende que esta asignación de equilibrio realmente se lleva a cabo. La «realización» del mecanismo puede, por tanto, resumirse por el conjunto de sus asignaciones de equilibrio; esto se transmite precisamente por la correspondencia de realización, ϕ.

La correspondencia de objetivo social, Q, especifica un conjunto de asignaciones que se juzgan «socialmente deseables». Es importante señalar que esta correspondencia se define como independiente de cualquier mecanísmo considerado. Para cada especificación de un entorno $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$, Q especifica un conjunto no vacío de asignaciones $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, cuya consecución debería ser el objetivo de un mecanismo construido.

El desarrollo de un mecanismo se evalúa con respecto a la correspondencia de objetivo social. Si cada asignación de equilibrio de los mecanismos es una asignación socialmente deseable, entonces el mecanismo «alcanza» el objetivo social. Por supuesto, es posible que un mecanismo alcance el objetivo social pero que sea «sesgado» en el sentido de que no se pueden alcanzar por el mecanismo algunas asignaciones socialmente deseables. Si cada asignación socialmente deseable es una asignación de equilibrio del mecanismo, el mecanismo es «insesgado» con respecto al objetivo social.

III. Un modelo agregativo de asignación intertemporal

III.a. Formulación

El conjunto de números enteros no negativos se denota por $N = 0, 1, 2, ...$; $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_{++}$) denota el conjunto de números reales no negativos (resp. reales positivos). Una sucesión $\mathbf{x} = (x_t)$ de reales es *no negativa* (escrito $\mathbf{x} \geqslant 0$) si $x_t \in \mathbb{R}_+$ para todo t en N; $\mathbf{x}$ es *estrictamente positiva* (escrito $\mathbf{x} \gg 0$) si $x_t \in \mathbb{R}_{++}$ para todo t en N; $\mathbf{x}$ es *positiva* (escrito $\mathbf{x} > 0$) si $\mathbf{x}$ es no negativa y $x_t \in \mathbb{R}_{++}$ para algún t. Para cualesquiera dos secuencias infinitas $\mathbf{x} = (x_t)$ y $\mathbf{x}' = (x'_t$, $\mathbf{x} \geqslant$ (resp. $>, \gg$)$\mathbf{x}'$ si $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \geqslant$ (resp. $>, \gg$)$\mathbf{o}$. El conjunto de todas las sucesiones no negativas (resp. positiva, estrictamente positiva) se denota por S_+ (resp. $\hat{S}, S_{++}$). El producto T cartesiano doble de A consigo mismo se escribe A^T (cuando T es infinito, escribimos $A^{(\infty)}$). Dada cualquier sucesión infinita $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^{(T)}$ denota el vector $(T + 1)$ cuyos elementos son los primeros $(T + 1)$ elementos de $\mathbf{x}$.

III.b. Una economía estacionaria

Consideremos un horizonte infinito, un modelo de un bien con una *tecnología* estacionaria descrito por una función de producción bruta f que satisface las siguientes condiciones de regularidad (F)

(F.1) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *es continua* en $\mathbb{R}_+$

(F.2) $f(0) = 0$

(F.3) $F(x)$ es *doblemente diferenciable para* $x > 0$, *con* $f'(x) > 0$ *y* $f''(x) < 0$.

(F.4) (a) $\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$; $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$

(b) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$

Nótese que las condiciones implican que f es estrictamente creciente y estrictamente cóncava en $\mathbb{R}_+$.

Dado el stock inicial $y > 0$, un programa de asignación de recursos (brevemente, «un programa $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$») desde y consiste en sucesiones no negativas de *inputs* $\mathbf{x} = (x_t)$, *stocks* $\mathbf{y} = (y_t)$ y *consumos* $\mathbf{c} = (c_t)$ que cumplen

$$y_0 = y, \quad y_{t+1} = f(x_t) \quad \text{y} \quad y_t = x_t + c_t \quad \text{para } t \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Obsérvese que la introducción de un retardo de producción implica que la decisión en el período t sobre cuánto consumir (elección de c_t) y sobre cuánto utilizar de input (elección de x_t) limita las posibilidades de elección de todos los períodos subsiguientes al período t, mientras que tales decisiones no tienen relación alguna con las elecciones realizadas en los períodos precedentes.

Correspondiente a cualquier f que satisfaga (F.1)-(F.4), existe un único número $\hat{K} > 0$, tal que

$$\text{(i) } f(k) = k \;\; ; \;\; \text{(ii) } f(x) > x \text{ para } 0 < x < k$$
$$\text{(iii) } f(x) < x \text{ para } x > k \tag{3.2}$$

Además, para cualquier programa (x, y, c) desde $y > 0$ se tiene

$$y_t \leqq k(y) \equiv \max(k, y) \quad \text{para } t \geqslant 0 \tag{3.3}$$

Nos referimos a K como el *stock máximo sostenible* dada f.

Dada cualquier δ tal que $0 < \delta < 1$, existe una única solución positiva x_δ^* a la ecuación

$$\delta f'(x) = 1$$

Escribamos $y_\delta^* = f(x)_\delta^*)$, $c_\delta^* = y_\delta^* - x_\delta^*$. Cuando $\delta = 1$ (*resp.* $0 < \delta < 1$), nos referimos a $(x_\delta^*, y_\delta^*, c_\delta^*)$ como el input, el stock y el consumo de la *regla de oro* (resp. *regla de oro modificada*). Dado $0 < \delta \leqslant 1$, podemos definir el programa estacionario $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{c}^*)$ por

$$x_t^* = x_\delta^*, \quad y_t^* = y_\delta^*, \; c_t^* = c_\delta^* \quad \text{para } t \in N \tag{GR}$$

Cuando $\delta = 1$ (resp. $0 < \delta < 1$), nos referimos a este programa estacionario (GR) como el *programa de la regla* (resp. *regla modificada*) *de oro*.

Se evalúan programas factibles alternativos de acuerdo a algún criterio que refleje los «objetivos sociales». Revisaremos los resultados cuando alcancemos algún criterio conocido.

III.c. Eficiencia

Un programa $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ desde $y > 0$ es *eficiente* si no existe ningún programa $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{c}')$ del mismo stock inicial y tal que $c_t' \geqslant c_t$ para todo $t \geqslant 0$ y $c_t' > c_t$ para algún t. Es fácil ver que existen infinitos programas desde cualquier $y > 0$.

La caracterización de programas eficientes en términos de precios sombra fue el tema central de Manlinvaud (1953). Definamos un *programa de maximización intertemporal del beneficio* desde y como una secuencia (x, y, c, p) tal que (x, y, c) sea un programa desde y, $\mathbf{p} = (p_t)$ es una sucesión positiva, y para todo $t \in N$,

$$p_{t+1} f(x_t) - p_t x_t \geqq p_{t+1} f(x) - p_t x \quad \text{para } x \geqq 0 \tag{M}$$

Aquí, p_t se interpreta como el *precio descontado* del bien en el período t. Los precios $\mathbf{p} = (p_t)$ se dice que «apoyan» el programa (x, y, c) y les llamaremos *precios de Malinvaud.* Ya que la secuencia $\mathbf{p}$ se supone que es positiva, p_0 es positivo (utilizando (M) y la condición: f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_+$). Si la secuencia de inputs $\mathbf{x} = (x_t)$ es estrictamente positiva, también lo es la secuencia de precios $\mathbf{p} = (p_t)$ y se deriva la condición «marginal» familiar:

$$p_{t+1} f'(x_t) = p_t. \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.1

Consideremos la secuencia $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{c})$ desde $y > 0$ definida por:

$$y = \hat{y}_0 = \hat{x}_0, \; \hat{y}_t = \hat{x}_t = f(\hat{x}_{t-1}) \text{ para } t \geqslant 1, \; \hat{c}_t = 0 \text{ para } t \geqslant 0$$

Esto es claramente un programa: se le llama el *programa de acumulación pura* porque prescribe el consumo cero en todos los períodos. Ya que $y > 0$, este programa no es eficiente. Sin embargo, siendo la sucesión de inputs $\hat{\mathbf{x}}$ estrictamente positiva, se puede establecer que $\hat{p}_0 = 1$ y definir $\hat{p}_{t+1} = f'(\hat{x}_t)\hat{p}_t$ para todo $t \geqslant 0$. Esta sucesión $\mathbf{p}$ nos da los precios de Malinvaud a los que el programa de acumulación pura satisface la condición (M).

De hecho, se puede utilizar el razonamiento anterior para establecer un resultado bastante general en nuestro estudio.

Proposición 3.1:

Si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ *es un programa desde* $y > 0$, *entonces existe una sucesión* $\mathbf{p} = (p_t)$ *de precios descontados tal que* (x, y, c, p) *es un programa de maximización intertemporal del beneficio desde* y.

Demostración: para ver esto, nótese que si $\mathbf{x} = (x_t)$ es una sucesión estrictamente positiva, entonces podemos definir una secuencia $\mathbf{p} = (p_t)$ de la siguiente manera:

$$p_0 = 1,\ p_{t+1} = [p_t/f'(x_t)] \quad \text{para } t \in \mathbf{N} \tag{3.5}$$

Se sigue de la concavidad de f que, dado cualquier $x \geqslant 0$ y $t \in N$, $f(x) - f(x_t) \leqslant f'(x_t)(x - x_t)$, tal que $p_{t+1}[f(x) - f(x_t)] \leqslant p_t(x - x_t)$, utilizando (3.5). Esto cumple la condición (M) después de transponer términos.

Si $\mathbf{x} = (x_t)$ no es una sucesión estrictamente positiva, sea $T \geqslant 0$ el primer período para el cual $x_T = 0$. Entonces, $x_t = 0$ para $t \geqslant T$ por (F.2). En este caso, se puede definir $\mathbf{p} = (p_t)$ así:

$$\begin{aligned} &p_0 = 1, \quad p_t = 0 \quad \text{para} \quad t \geqslant T + 1 \\ &p_{t+1} = p_t/f'(x_t) \quad \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant T - 1 \quad \text{si} \quad T \geqslant 1 \end{aligned}$$

Es fácil comprobar, como antes, que (x, y, c, p) es un programa de maximización intertemporal de beneficio.

Nota: Consideremos una función de producción, f, que cumple (F.1), (F.2) y es no decreciente y cóncava en $\mathbb{R}_+$. Entonces, tenemos lo que se podría llamar un *marco* «clásico», ya que el conjunto de tecnología $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y \leqslant f(x)\}$ sería cerrado, convexo y permitiría libre disposición. En este marco más general, la proposición 3.1 no es válida. En efecto, incluso si exigimos que el programa (x, y, c) en cuestión sea *eficiente*, el resultado no se cumple. Esto fue demostrado de una manera convincente por McFadden (1975), al construir un ejemplo de un programa eficiente cuyos únicos precios de apoyo (en el sentido de (M)) es la sucesión nula.

Ejemplo 3.2. (McFadden)

Supongamos que la función de producción es:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2(1 - x)^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

Sea J el conjunto de períodos de tiempo $t_n = 3^n$, $n = 1, 2, 3...$ Definamos la sucesión $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ de esta manera:

$$\begin{aligned} &x_t = 1 \quad \text{si} \quad t \in J; \quad x_t = (1/2) \quad \text{si} \quad t \notin J \\ &y_t = 2 \quad \text{si} \quad t - 1 \in J; \quad y_t = (3/2) \quad \text{si} \quad t - 1 \notin J \\ &c_t = (1/2) \quad \text{si} \quad t \in J; \quad c_t = 1 \quad \text{si} \quad t - 1 \notin J, \quad c_t = (3/2) \quad \text{si} \quad t - 1 \in J \end{aligned} \tag{3.7}$$

Se puede mostrar (ver McFadden, 1975) que (x, y, c) es un programa eficiente desde $y = (3/2)$. Como $\mathbf{x}$ es estrictamente positivo y $f'(x) = 0$ es infinitamente frecuente, la relación $p_{t+1}f'(x_t) = p_t$, que caracteriza la maximización intertemporal del beneficio, sólo se puede cumplir con $\mathbf{p} = 0$.

En el ejemplo de McFadden, f satisface (F.1), (F.2). Además, f es cóncava y continuamente diferenciable. Sin embargo, $f'(x) = 0$ cuando $x \geqslant 1$, con lo que no se cumple (F.3). De hecho, lo que es crucial para la validez de la Proposición 3.1 (más que la continuidad y la concavidad de f) es el hecho de que f es *estrictamente creciente* (nuestra demostración se hace más fácil si asumimos además que f es diferenciable, pero esto no es esencial para el resultado). En un modelo multisectorial, esta condición se traslada a lo que Malinvaud (1953) llamó la condición de «no efectividad».

Los ejemplos 3.1 y 3.2 indican dos posibilidades destacables en economías con *horizonte infinito*: incluso en entornos «clásicos» la maximización intertemporal del beneficio (M) en cada período no garantiza la eficiencia; y un programa eficiente no necesita tener un sistema de precios de Malinvaud para el cual esa condición de maximización del beneficio (M) se puede mostrar que se cumple.

Así, las implicaciones económicas de los resultados de «dualidad» sobre la eficiencia productiva y los precios de apoyo (resumidos, por ejemplo, por Koopmans, 1957, págs. 83-92) necesitan ser reconsideradas al hacer una transición desde el horizonte finito al infinito. Quizás, el resultado más importante en esta dirección sea el siguiente, que se debe a Malinvaud (1953).

Proposición 3.2 (Malinvaud)

Supongamos que (x, y, c, p) es un programa de maximización intertemporal del beneficio desde $y > 0$, que satisface que $p_t > 0$ para $t \geqslant 0$, y

$$\lim_{t \to \infty} p_t x_t = 0 \tag{IF}$$

Entonces, (x, y, c) es un programa eficiente desde y.

Demostración: Para ver esto, sea $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ cualquier programa desde y. Ahora, para cualquier T finito,

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{T} p_t(\bar{c}_t - c_t) &= \sum_{t=0}^{T} p_t[(\bar{y}_t - \bar{x}_t) - (y_t - x_t)] = \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} [(p_{t+1} f(\bar{x}_t) - p_t \bar{x}_t) - (p_{t+1} f(x_t) - p_t x_t)] - p_T \bar{x}_T + p_T x_T \end{aligned} \tag{3.8}$$

Utilizando la condición (M) para $t = 0, ..., T - 1$ y la no negatividad de $p_T x_T$,

$$\sum_{t=0}^{T} p_t(\bar{c}_t - c_t) \leqq p_T x_T \tag{3.9}$$

Si (x, y, c) es *no eficiente*, entonces existe un programa (x', y', c') desde y tal que $c'_t \geqslant c_t$ para todo $t > 0$, y $c' = c + m$, $m > 0$ para algún período τ. Así, para todo $T \geqslant \tau$

$$0 < mp_\tau \leqq \sum_{t=0}^{T} p_t(c'_t - c_t) \tag{3.10}$$

Combinando (3.9), (3.10) y la condición (IF), obtenemos una contradicción. Esto prueba que (x, y, c) es eficiente.

La condición importante de la Proposición 3.2 es que el valor presente del input se hace insignificante con el tiempo. A esto nos referimos comúnmente como el *futuro insignificante* o la *condición de transversalidad.*

En sus comentarios sobre las Proposiciones 3.1 y 3.2, Koopmans señala lo siguiente: «Dando suficiente rienda suelta a nuestra imaginación podemos todavía "visualizar" la condición (M) de maximización intertemporal del beneficio que se cumple a través de la descentralización de las decisiones entre un número infinito de productores, cada uno de ellos encargado de aquella parte del programa relacionada con un período futuro. También se puede visualizar una descentralización adicional entre muchos productores contemporáneos dentro de cada período. Pero incluso a este nivel de abstracción, es difícil ver cómo *se puede restringir a cualquier decisor particular* la tarea de cumplir la condición (IF). Esta es una condición nueva, para la que no hay equivalencia en los modelos finitos.» Se debería subrayar que si se le permite a un agente en un período concreto observar sólo un número finito de precios y cantidades, nunca es capaz de comprobar si la condición (IF) se cumple o no; por supuesto, incluso con la observación de una subsecuencia infinita de $(p_t x_t)$, puede que no sea posible verificar (IF).

En este momento, nos gustaría comentar un esquema alternativo para estudiar la relación entre eficiencia (u optimalidad de Pareto) y maximización del valor en un espacio de bienes de dimensión infinita. Con un sólo bien en cada período t, se puede identificar formalmente el *espacio de mercancías* (ver Debreu, 1959) con el espacio lineal S de todas las sucesiones reales. De hecho, en vista de (3.3), se puede centrar la atención en l_∞, el espacio lineal de todas las secuencias reales limitadas. Para cualquier elemento $\mathbf{x} = (x_t)$ en l_∞, definamos la norma $\|x\|$ como:

$$\|x\| = \sup_t (x_t) \tag{3.11}$$

El conjunto de todos los funcionales lineales continuos con respecto a la topología de la «Norma del Supremo» se denota por l^*_∞. Un elemento p en l^*_∞ es *no negativo* si $p(\mathbf{x}) \geqslant 0$ para todo $\mathbf{x} \geqslant 0$.

Dado un programa (x, y, c) desde algún $y > 0$, llamemos $c = (c_t)$ a un programa de consumo desde y. Denotemos el conjunto de todos los programas de consumo desde $y > 0$ por C. Entonces, C es un conjunto convexo no vacío de l_∞. Se puede recurrir a un argumento de separación (ver Radner, 1967) para probar el siguiente resultado.

Proposición 3.3

Sea $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ un programa eficiente desde $y > 0$. Entonces, existe un p no-nulo y no negativo en l^*_∞ tal que

$$p(\bar{\mathbf{c}}) > p(\mathbf{c}) \tag{3.12}$$

para todo $\mathbf{c}$ *en* $\mathbf{C}$.

Mientras que la propiedad de maximización del valor (3.12) tiene, sin duda, interés, una dificultad obvia es que el funcional lineal continuo p necesita ser representable por una sucesión $\mathbf{p} = (p_t)$ con respecto a la cual se pueda formular la regla de período a período de maximización del beneficio. En efecto, es conocido que si p está en l^*_∞, entonces para cualquier $\mathbf{c}$ en l_∞,

$$p(c) = \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t + p_\infty(c) \tag{3.13}$$

donde (p_t) es una sucesión sumable ($\sum_{t=0}^{\infty} |p_t|$ es finita) y $p_\infty(c)$ se obtiene integrando $\mathbf{c}$ con respecto a una medida aditiva puramente infinita en N (ver Radner, 1967 y Majumdar, 1970). Incluso cuando $\mathbf{p}$ es no negativo, es posible que $p_t = 0$ para todo $t \in N$. Por otra parte, $p_\infty(\mathbf{c}) = p_\infty(\mathbf{c}')$ cuando $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}'$ difieren sólo en un número finito de períodos de tiempo. Así, las reglas de evaluación (3.13) no se pueden interpretar o utilizar fácilmente en el contexto del diseño de un mecanismo intertemporal descentralizado de asignación de recursos (ver Malinvaud, 1961).

Ejemplo 3.3.

Consideremos el programa de la regla de oro (GR) definido anteriormente. Con $\delta = 1$, simplemente suprimimos el símbolo y escribimos (x^*, y^*, c^*). Se puede verificar directamente que es un programa eficiente. Además, para la sucesión de precios estacionaria $\mathbf{p}^* = (p^*_t)$, donde $p^*_t = 1$ para $t \in N$, se cumple la condición (M) de maximización intertemporal del beneficio. Obsérvese que $p^*_t x^*_t = x^* > 0$. Así, la condición (IF) *no* se cumple. Claramente, $\mathbf{p}^*$ no es una sucesión sumable. Además, el funcional lineal no negativo y no-cero p para el que $\mathbf{c}^*$ maximiza el valor (ver (3.12)) no tiene ninguna secuencia (p_t) asociada en l_1. De hecho,

$$p(c^*) = p_\infty(c^*) = c^*$$

También, para *cualquier* programa de consumo factible $c = (c_t)$ tal que exista el $\lim_{t\to\infty} c_t$,

$$p(c) = \lim_{t\to\infty} c_t$$

En particular, $p(c) = c^*$ para todos los programas de consumo factibles $c = (c_t)$ tal que $\lim_{t\to\infty} c_t = c^*$.

III.d. Optimalidad

Al discutir el criterio de evaluación conocido como «optimalidad», se introduce típicamente una función de *utilidad*, u, desde $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{R}$, y un *factor de descuento*, δ, tal que $0 < \delta \leqslant 1$. Un programa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ desde $y > 0$ es *óptimo* si

$$\limsup_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \delta^t[u(c_t) - u(\bar{c}_t)] \leqslant 0 \tag{3.14}$$

para cualquier programa (x, y, c) desde y. Cuando $\delta < 1$, de tal forma que a las utilidades futuras se les va dando ponderaciones menores que a las actuales, nos referimos al ejercicio de optimalidad como el caso «descontado»; cuando $\delta = 1$, nos referimos al ejercicio como el caso «no descontado» o de «Ramsey». A continuación, examinamos el problema de la existencia de programas óptimos en cada caso, cuando la función de utilidad, u, cumple:

(U.1) *u es continua en $\mathbb{R}_+$*

(U.2) *u es dos veces diferenciable para $c > 0$ con $u'(c) > 0$ y $u''(c) \leqslant 0$.*

Claramente, (U.1), (U.2) implican que u es cóncava y estrictamente creciente en $\mathbb{R}_+$. En adelante, normalizamos $u(0) = 0$.

III.d.1. El caso descontado

Cuando $0 < \delta < 1$, se puede aprovechar la acotación del conjunto de programas desde cualquier $y \geqslant 0$ (ver (3.3)) y la continuidad de las funciones de utilidad y producción ((U.1) y (F.1)) para obtener la existencia de un programa óptimo.

Proposición 3.3.

Existe un único programa óptimo desde cualquier $y \geqslant 0$.

Demostración: Si (x, y, c) es cualquier programa desde y, entonces $0 \leqslant c_t \leqslant K(y) \equiv \max(K, y)$ para todo $t \geqslant 0$, y así $0 = u(0) \leqslant u(c_t) \leqslant u(K(y))$ para $t \geqslant 0$. Denotemos $u(K(y))$ por b. Entonces, claramente, $0 \leqslant u(c_t) \leqslant b$ para $t \geqslant 0$, y así para todo $T \geqslant 1$

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t u(c_t) \leqslant b/(1-\delta)$$

Como $u(c_t) \geqslant 0$ para $t \geqslant 0$, sabemos que

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t) \equiv \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \delta^t u(c_t)$$

existe y no puede exceder $[b/(1-\delta)]$. Sea $a = \sup\left\{\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t) : (x, y, c) \text{ es un programa desde } y\right\}$.

Elijamos una secuencia de programas (x^n, y^n, c^n) desde y tal que

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t^n) \geqslant a - (1/n) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.15}$$

Utilizando (3.3), la continuidad de f y el método diagonal de Cantor, existe un programa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ desde y, y una subsecuencia de n (retener la anotación) tal que para $t \geqslant 0$,

$$(x_t^n, y_t^n, c_t^n) \to (\bar{x}_t, \bar{y}_t, \bar{c}_t) \quad \text{cuando } n \to \infty \tag{3.16}$$

Exigimos que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ sea un programa óptimo desde y. Si la exigencia es falsa, entonces podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\bar{c}_t) < a - \varepsilon$$

Cojamos T tal que $\delta^{T+1}[b/(1-\delta)] < (\varepsilon/3)$. Utilizando (3.16) y la continuidad de u, podemos encontrar $\bar{n}$ tal que para todo $n \geqslant \bar{n}$,

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t u(c_t^n) < \sum_{t=0}^{T} \delta^t u(\bar{c}_t) + (\varepsilon/3)$$

Así, para todo $n \geqslant \bar{n}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t^n) &\leqslant \sum_{t=0}^{T} \delta^t u(c_t^n) + \delta^{T+1}[b/(1-\delta)] \\ &< \sum_{t=0}^{T} \delta^t u(c_t^n) + (\varepsilon/3) \\ &< \sum_{t=0}^{T} \delta^t u(\bar{c}_t) + (2\varepsilon/3) \\ &< a - (\varepsilon/3) \end{aligned}$$

Pero esto nos conduce a una contradicción de (3.15) para $n > \max[\bar{n}, (3/\varepsilon)]$. Esto establece nuestra exigencia. La unicidad del programa óptimo se sigue de la estricta concavidad de f.

III.d.2. El caso no descontado

Cuando $\delta = 1$, el método de probar la existencia de un programa óptimo es más complicado; la ventaja, sin embargo, es que se establecen simultáneamente diversos resultados interesantes.

El centro de atención en este caso es el programa de la regla de oro (GR) definido anteriormente; para simplificar la anotación, suprimimos el subíndice δ. Si definimos $p^* = u'(c^*)$, podemos comprobar fácilmente (utilizando la concavidad de f y de u) que

$$\begin{cases} u(c^*) - p^*c^* \geq u(c) - p^*c & \text{para } c \geq 0 \\ p^*f(x^*) - p^*x^* \geq p^*f(x) - p^*x & \text{para } x \geq 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Para cualquier $c \geq 0$, definamos la *pérdida de valor de consumo* en p^* como:

$$\alpha(c) \equiv [u(c^*) - p^*c^*] - [u(c) - p^*c]$$

De una manera similar, para cualquier $x \geq 0$, definamos la *pérdida de beneficio intertemporal* en p^* como:

$$\beta(x) \equiv [p^*f(x^*) - p^*x^*] - [p^*f(x) - p^*x)$$

Utilizando (3.17), $\alpha(c) \geq 0$ para todo $c \geq 0$ y $\beta(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. De particular interés para lo que sigue es el siguiente «lema de pérdida de valor»:

Lema 3.1

Sea $\hat{K}$ un número positivo dado. Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\beta > 0$ tal que si $0 \leq x \leq \hat{K}$ y $|x - x^*| \geq \beta$, entonces $\beta(x) \geq \beta$.

Demostración: si la exigencia es falsa, existe $\varepsilon > 0$ y una secuencia x^n tal que $0 \leq x^n \leq \hat{K}$ y $|x^n - x^*| \geq \varepsilon$, pero $\beta(x^n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Consideremos una subsecuencia de x^n (retener la anotación) que converge a algún $\tilde{x}$. Entonces $0 \leq \tilde{x} \leq \hat{K}$ y $|\tilde{x} - x^*| \geq \varepsilon$. También, como $\beta(x^n) \to 0$ y $x^n \to \tilde{x}$, la continuidad de f implica que $\beta(\tilde{x}) = 0$. Pero, entonces, por la estricta concavidad de f, para $x = (1/2)\,\tilde{x} + (1/2)\,x^*$ tendríamos $\beta(x) < 0$, una contradicción.

Se pueden obtener estimaciones de la *suma* de todas las pérdidas de valor utilizando el siguiente resultado, cuya prueba es obvia y, por tanto, la omitimos.

Lema 3.2

Si (x, y, c) es un programa desde $y > 0$, entonces para cada finito $T \geq 1$,

$$\sum_{t=0}^{T} [u(c_t) - u(c^*)] = p^*(y - y^*) - p^*(x_T - x^*) - \sum_{t=0}^{T} \alpha(c_t) - \sum_{t=0}^{T} \beta(x_t) \tag{3.18}$$

Un programa (x, y, c) desde $y > 0$ es *bueno* si existe un número real B, tal que

$$\sum_{t=0}^{T} [u(c_t) - u(c^*)] \geq \beta \quad \text{para todo } T \geq 0$$

y es *malo* si

$$\sum_{t=0}^{T} [u(c_t) - u(c^*)] \to -\infty \quad \text{cuando } T \to \infty$$

Se puede mostrar que, dado cualquier $y > 0$, el conjunto de los programas buenos y malos desde y agota el conjunto de *todos* los programas desde y. Además, el conjunto de los programas buenos es no vacío.

Lema 3.3

Existe un programa bueno para cada $y > 0$. Si un programa desde $y > 0$ no es bueno, es malo.

Demostración: Consideremos el programa de acumulación pura $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{c})$ desde y (véase el ejemplo 3.1). No es difícil mostrar que $\hat{x}_t \to K$ cuando $t \to \infty$, habiendo definido K en (3.2). Como $K > x^*$, $\hat{x}_t > x^*$ para todo t suficientemente grande. Sea τ el primer período tal que $\hat{x} \geq x^*$. Consideremos la secuencia (x, y, c) definida por: $y_0 = y$; $x_t = \min(\hat{x}_t, x^*)$, $y_{t+1} = f(x_t)$ y $c_t = y_t - x_t$ para $t \geq 0$. Entonces (x, y, c) es claramente un programa desde y, y $c_t = c^*$ para todo $t > \tau$. Por tanto, (x, y, c) es un programa bueno.

Supongamos, luego, que (x', y', c) es un programa desde $y > 0$ que no es bueno. Entonces, dado cualquier número real B, existe algún T, tal que

$$\sum_{t=0}^{T} [u(c'_t) - u(c^*)] < B$$

Utilizando el hecho de que $y'_t < K(y) = \max(k, y)$ para $t \geq 0$ (véase (3.3)) y el Lema 3.2, tenemos también para todo $\tau > T$

$$\sum_{t=T+1}^{\tau} [u(c'_t) - u(c^*)] \leq p^*[k(y) + x^*]$$

Así, dado cualquier número real B, existe algún T, tal que para todo $\tau > T$,

$$\sum_{t=0}^{\tau} [u(c_t') - u(c^*)] < p^*[k(y) + x^*] + B$$

que muestra que (x', y', c') es malo.

En vista del anterior resultado, nuestra búsqueda de un programa óptimo se puede limitar a la clase de los programas buenos. Los programas buenos convergen a la regla de oro en los niveles de input, stock y consumo, resultado al que normalmente nos referimos como la propiedad de la «autopista».

Lema 3.4

Sea (x, y, c) cualquier programa bueno desde $y > 0$. Entonces $(x_t, y_t, c_t) \to (x^*, y^*, c^*)$ cuando $t \to \infty$.

Demostración: Supongamos que x_t no converge a x^*. Entonces existe algún $\varepsilon > 0$ y una subsucesión de períodos para los que $|x_t - x^*| \geq \varepsilon$. Utilizando el Lema 3.1 y definiendo $\hat{K} \equiv K(y)$, existe $\beta > 0$ tal que $\beta(x_t) \geq \beta$ para esta subsucesión de períodos. Utilizando el Lema 3.2 se sigue que (x, y, c) no es bueno. Así, $x_t \to x^*$ cuando $t \to \infty$; en consecuencia, $y_t = f(x_{t-1}) \to f(x^*) = y^*$ cuando $t \to \infty$, y $c_t = y_t - x_t \to y^* - x^* = c^*$ cuando $t \to \infty$.

Lema 3.5

Si (x, y, c) es cualquier programa bueno desde $y > 0$,

$$\lim_{T \to \infty} \sum_{t=0}^{T} [u(c_t) - u(c^*)] \text{ existe}$$

Demostración: Como (x, y, c) es bueno, existe un número real B tal que para todo $T \geq 0$

$$\sum_{t=0}^{T} [u(c_t) - u(c^*)] \geq B \tag{3.19}$$

Utilizando el Lema 3.2 y (3.19), tenemos para $T \geq 0$,

$$\sum_{t=0}^{T} \alpha(c_t) + \sum_{t=0}^{T} \beta(x_t) \leq p^*y + p^*x^* - B \tag{3.20}$$

Como $\alpha(c_t) \geq 0$ y $\beta(x_t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, (3.20) implica que

$$L(x, y, c) \equiv \lim_{T \to \infty} \left[\sum_{t=0}^{T} \alpha(c_t) + \sum_{t=0}^{T} \beta(x_t) \right] \tag{3.21}$$

existe. También, el Lema 3.4 implica que $p^*x_T \to p^*x^*$ cuando $T \to \infty$. Utilizando esto y (3.21) del Lema 3.2, se puede tomar el límite de (3.18) para obtener

$$\sum_{t=0}^{\infty} [u(c_t) - u(c^*)] = p^*y + p^*x^* - L(x, y, c) \tag{3.22}$$

Esto establece el Lema.

Finalmente, podemos demostrar el resultado sobre la existencia de un programa óptimo.

Proposición 3.4

Existe un único programa óptimo desde cualquier $y > 0$.

Demostración: Sea $L(y) = \inf\{L(x, y, c) : (x, y, c)$ un programa bueno desde $y\}$. Ahora, tomemos una secuencia (x^n, y^n, c^n) de programas buenos desde y tal que

$$L(x^n, y^n, c) \leq L(y) + (1/n) \quad \text{para } n = 1, 2, 3... \tag{3.23}$$

Utilizando (3.3), la continuidad de f y el método diagonal de Cantor, existe un programa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ desde y, y una subsucesión de n (retener la anotación) tal que para $t \geq 0$,

$$(x_t^n, y_t^n, c_t^n) \to (\bar{x}_t, \bar{y}_t, \bar{c}_t) \quad \text{cuando } n \to \infty \tag{3.24}$$

Exigimos que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ sea bueno y $L(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}) = L(y)$. Si la exigencia es falsa, entonces podemos encontrar un entero positivo T, y $\varepsilon > 0$, tal que

$$\left[\sum_{t=0}^{T} \alpha(\bar{c}_t) + \sum_{t=0}^{T} \beta(\bar{x}_t) \right] \geq L(y) + \varepsilon \tag{3.25}$$

Utilizando (3.24) y (3.25), y la continuidad de f y de u, podemos encontrar un entero positivo $\bar{n}$, tal que para todo $n \geq \bar{n}$,

$$\left[\sum_{t=0}^{T} \alpha(c_t^n) + \sum_{t=0}^{T} \beta(x_t^n) \right] \geq L(y) + (\varepsilon/2) \tag{3.26}$$

Claramente, (3.26) implica que para todo $n \geq \bar{n}$, $L(x^n, y^n, c^n) \geq L(y) + (\varepsilon/2)$, que contradice (3.23) para $n > \max[\bar{n}, (2/\varepsilon)]$. Esto establece nuestra exigencia.

Utilizando el Lema 3.3 y (3.22), se sigue fácilmente que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ es un programa óptimo desde y. La unicidad del programa óptimo se sigue de la estricta concavidad de f.

III.d.3. Funciones de valor y de política

Dadas las proposiciones 3.3 y 3.4, podemos presentar un tratamiento elemental de los conceptos de «valor» y funciones de «política», que destacan dentro del esquema de programación dinámica de optimalidad intertemporal.

Cuando $0 < \delta < 1$, se puede definir una función de valor, $V: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$V(y) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\bar{c}_t) \qquad (3.27)$$

donde $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ es el programa óptimo desde $y \geqslant 0$. Cuando $\delta = 1$, podemos igualmente definir una *función de valor*, $V: \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ por

$$V(y) = \sum_{t=0}^{\infty} [u(\bar{c}_t) - u(c^*)] \qquad (3.28)$$

donde $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ es el programa óptimo desde y.

Como existe un único programa óptimo (en ambos casos, el descontado y el no descontado) desde cualquier $y > 0$, se puede definir una *función de política (consumo óptimo)*, $g: \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_+$ por

$$g(y) = \bar{c}_0 \qquad (3.29)$$

donde $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ es el programa óptimo desde y. Se comprueba fácilmente que esta definición también implica que para todo $t \geqslant 0$, $\bar{c}_t = g(\bar{y}_t)$.

A continuación, establecemos algunas propiedades básicas de las funciones de valor y de política.

Lema 3.6:

La función de valor, V, es creciente, estrictamente cóncava y continua en $\mathbb{R}_{++}$; la función de política, g, es continua en $\mathbb{R}_{++}$.

Mientras que la estricta concavidad y la continuidad de la función de valor se siguen directamente de la estricta concavidad de f, la continuidad de la función de política requiere aplicar un teorema de máximo.

Se pueden estudiar otras propiedades de V y de g en dos subcasos importantes de la clase de funciones de utilidad caracterizadas por (U.1) y (U.2): (i) el caso estrictamente cóncavo; (ii) el caso lineal.

La función de utilidad estrictamente cóncava

Si recordamos (U.1), reforzando (U.2):

(U.2⁺): *u es dos veces diferenciable en $c > 0$, con $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$,*

y suponemos, además,

(U.3): $u'(c) \to \infty$ cuando $c \to 0$

entonces nos referimos al sub-caso, por conveniencia, como el «caso estrictamente cóncavo». En este subcaso, se puede establecer la siguiente relación básica entre las funciones de valor y de política.

Lema 3.7:

En el caso estrictamente cóncavo, (i) *la función de valor, V, es diferenciable en $\mathbb{R}_{++}$; (ii) la función de política, g, satisface $0 < g(y) < y$ para todo $y > 0$; y* (iii) *$V'(y) = u'(g(y))$ para todo $y > 0$.*

La función de utilidad lineal

Si $u(c) = c$ para todo $c \geqslant 0$ (que, por supuesto, satisface (U.1) y (U.2)), nos referimos al sub-caso como el «caso lineal». En este subcaso, es de hecho posible describir la función de política, g, explícitamente.

Lema 3.8:

En el caso lineal, dado $0 < \delta \leqslant 1$, la función de política, g, satisface

$$g(y) = \max(y - x_\delta^*, 0) \quad \textit{para todo } y > 0$$

donde x_δ^* es la regla de oro ($\delta = 1$) o regla modificada de oro ($0 < \delta < 1$) del input.

Demostración: Dado $y > 0$ y $0 < \delta \leqslant 1$, definamos la secuencia $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ por $\bar{y}_0 = y$, $\bar{y}_{t+1} = \min(f(\bar{y}_t), f(x_\delta^*))$ para $t \geqslant 0$, $\bar{c}_t = g(\bar{y}_t)$ para $t \geqslant 0$ y $\bar{x}_t = \bar{y}_t - \bar{c}_t$ para $t \geqslant 0$. Se puede probar que este es un programa desde y. Tenemos que mostrar que este es un programa óptimo desde y.

Sea (x, y, c) cualquier programa desde y. Consideramos dos casos: (i) $y \geqslant x_\delta^*$, (ii) $y < x_\delta^*$.

Caso (i). Tenemos para cualquier T,

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t(c_t - \bar{c}_t) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t\{[\delta f(x_t) - x_t] - [\delta f(x_\delta^*) - x_\delta^*]\} + \delta^T(x_\delta^* - x_T)$$

ya que $y_0 = \bar{y}_0 = y$, y $x_t = x_\delta^*$ para $t \geqslant 0$. Ahora, para todo $x \geqslant 0$, $\delta f(x) - x \leqslant \delta f(x_\delta^*) - x_\delta^*$, utilizando la concavidad de f y $\delta f'(x_\delta^*) = 1$. Así, para cualquier T,

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t(c_t - \bar{c}_t) \leqslant \delta^T(x_\delta^* - x_T) \qquad (3.30)$$

Si $0 < \delta < 1$, el lado derecho de la expresión (3.30) converge a cero a medida que $T \to \infty$, estableciendo la optimalidad de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$. Si $\delta = 1$, y (x, y, c) es bueno, $x_T \to x^*$ cuando $T \to \infty$, de forma que

$$\limsup_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \delta^t (c_t - \bar{c}_t) \leqslant 0 \tag{3.31}$$

Si $\delta = 1$ y (x, y, c) es malo, entonces (3.31) se sigue directamente de la definición de un programa malo, y el hecho de que $\bar{c}_t = c^*$ para $t \geqslant 1$. Esto establece la optimalidad de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$.

Caso (ii). Consideremos el programa de acumulación pura $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{c})$ desde y (véase el ejemplo 3.1). Sabemos que $\hat{y}_t \to K > x^*_\delta$ cuando $t \to \infty$. Sea $\tau \geqslant 1$ el primer período para el que $\hat{y}_\tau \geqslant x^*_\delta$. Entonces, claramente, $\bar{y}_t = \hat{y}_t = \hat{x}_t = \bar{x}_t$ y $\bar{c}_t = 0$ para $t = 0, ..., \tau - 1$; y $\bar{x}_t = x^*_\delta$ para $t \geqslant \tau$. Así, para cualquier $T > \tau$, obtenemos

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t (c_t - \bar{c}_t) = \sum_{t=0}^{\tau-1} \delta^t \{[\delta f(x_t) - x_t] - [\delta f(\hat{x}_t) - \hat{x}_t]\} +$$

$$+ \sum_{t=\tau}^{T-1} \delta^t \{[\delta f(x_t) - x_t] - [\delta f(x^*_\delta) - x^*_\delta]\} + \delta^T (x^*_\delta - x_T)$$

Como se señaló en el caso (i), para todo $x \geqslant 0, [\delta f(x) - x] \leqslant [\delta f(x^*_\delta) - x^*_\delta]$. También, para $t = 0, ..., \tau - 1$, $\delta f(x_t) - x_t \leqslant \delta f(\hat{x}_t) - \hat{x}_t$ ya que $[\delta f(x) - x]$ es creciente para $0 \leqslant x < x^*_\delta$ y $\hat{x}_t \geqslant x_t$ para $t = 0, ..., \tau - 1$. Así, para $T > \tau$,

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t (c_t - \bar{c}_t) \leqslant \delta^T (x^*_\delta - x_T)$$

Ahora, repitiendo el argumento utilizado en el caso (i), (x, y, c) es óptimo.

IV. Sobre la optimalidad de los programas competitivos

El concepto de prograa competitivo ha sido central en la discusión del papel de los precios en la asignación intertemporal de recursos.

Definamos un *programa competitivo* desde y como una secuencia (x, y, c, p) tal que (x, y, c) es un programa desde y, y $\mathbf{p} = (p_t)$ es una sucesión positiva de precios que cumplen para todo $t \in N$,

$$\delta^t u(c_t) - p_t c_t \geqslant \delta^t u(c) - p_t c \quad \text{para todo } c \geqslant 0 \tag{G}$$
$$p_{t+1} f(x_t) - p_t x_t \geqslant p_{t+1} f(x) - p_t x \quad \text{para todo } x \geqslant 0 \tag{M}$$

La segunda condición (M) la introdujimos anteriormente al hablar de la eficiencia. La primera condición (G) puede interpretarse en términos de maximi-

zación de la utilidad restringida. Se puede pensar en las condiciones (G) y (M) en términos de una separación de las decisiones de consumo y producción por medio de un sistema de precios, asunto que centra la magistral exposición de Koopmans (1957) de una economía de Robinson Crusoe. Nos referimos a la sucesión $\mathbf{p} = (p_t)$ como un sistema de *precios competitivos* que apoyan el programa (x, y, c). (En la literatura, se les llama también precios «sombra» o precios «estimulantes».)

Ejemplo 4.1:

Consideremos, para $0 < \delta \leqslant 1$, el programa (x^*, y^*, c^*) definido por (GR). Definamos una secuencia $\mathbf{p}^* = (p^*_t)$ por $p^*_t = u'(c^*_\delta)$ para $t \geqslant 0$. Es fácil probar que (x^*, y^*, c^*, p^*) es un programa competitivo desde y^*_δ.

Nuestro interés en los programas competitivos se debe naturalmente al siguiente resultado básico.

Proposición 4.1:

Si $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}, \bar{p})$ es un programa competitivo desde $y > 0$, entonces $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ es óptimo si

$$\lim_{t\to\infty} \bar{p}_t \bar{x}_t = 0 \quad (\textit{cuando } 0 < \delta < 1) \tag{IF}$$

$$\sup_{t\geqslant 0} \bar{p}_t \bar{x}_t < \infty \quad (\textit{cuando } \delta = 1) \tag{BCV}$$

Demostración: Sea (x, y, c) un programa desde cualquier $y > 0$. Utilizando (G) y (M), se obtiene para cualquier $T \geqslant 1$,

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t [u(c_t) - u(\bar{c}_t)] \leqslant \sum_{t=0}^{T} \bar{p}_t (c_t - \bar{c}_t) =$$

$$= \sum_{t=0}^{T-1} \{[\bar{p}_{t+1} f(x_t) - \bar{p}_t x_t]$$

$$- [\bar{p}_{t+1} f(\bar{x}_t) - \bar{p}_t \bar{x}_t]\} +$$

$$+ \bar{p}_T (\bar{x}_T - x_T) + \bar{p}_0 (y - \bar{y}) \leqslant$$

$$\leqslant \bar{p}_T (\bar{x}_T - x_T) + \bar{p}_0 (y - \bar{y}) \tag{4.1}$$

Consideremos, primero, el caso $0 < \delta < 1$. Utilizando (4.1), si (x', y', c') es cualquier programa desde $\bar{y}$, entonces

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t u(c'_t) - \sum_{t=0}^{T} \delta^t u(\bar{c}_t) \leqslant \bar{p}_T \bar{x}_T$$

El lado izquierdo de las expresiones tiene límites (ver la Sección III.d.1), y (IF) asegura que el límite del lado derecho es cero. Así, estableciendo la optimalidad de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$.

Consideremos, luego, el caso $\delta = 1$. Utilizando (4.1),

$$\sum_{t=0}^{T} [u(c_t) - u(c^*)] \leqslant \bar{p}_T \bar{x}_T + \bar{p}_0 y^* \quad \text{para todo } T \geqslant 1$$

Utilizando (BCV), se sigue que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ es bueno, y por el Lema 3.4, tenemos $(\bar{x}_t, \bar{y}_t, \bar{c}_t) \rightarrow (x^*, y^*, c^*)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Este hecho, y (BCV) implican que existe algún número real A, tal que $\bar{p}_t \leqslant A$ para $t \geqslant 0$.

Si (x', y', c') es cualquier programa desde $\bar{y}$, entonces utilizando (4.1) se obtiene para todo $T \geqslant 1$

$$\sum_{t=0}^{T} [u(c_t') - u(\bar{c}_t)] \leqslant \bar{p}_T(\bar{x}_T - x_T') \tag{4.2}$$

Si (x', y', c') es bueno, entonces $x_T' \rightarrow x^*$ cuando $T \rightarrow \infty$. También, $\bar{x}_T \rightarrow x^*$ cuando $T \rightarrow \infty$, y $0 \leqslant \bar{p}_T \leqslant A$ para todo T. Utilizando esto en (4.2) obtenemos

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{T} [u(c_t') - u(\bar{c}_t)] \leqslant 0 \tag{4.3}$$

Si (x', y', c) es malo, entonces (4.3) se sigue directamente de la definición de un programa malo y del hecho de que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ es un programa bueno.

Nota: Ya hemos introducido la condición (IF) al tratar la eficiencia. En la literatura, se cita a la condición (BCV) como la condición del «valor del capital limitado».

La relación entre los programas competitivos y óptimos se puede estudiar más adelante; específicamente, tiene mucho interés saber que la inversa de la proposición 4.1 también es cierta. Lo demostraremos sólo para el caso de la función de utilidad «estrictamente cóncava» (es decir, cuando u cumple (U.1), (U.2$^+$) y (U.3)). En el caso más general, la demostración es mucho más complicada.

Comenzamos señalando la siguiente caracterización de los programas competitivos en el caso estrictamente cóncavo.

Lema 4.1

Sea (x, y, c) un programa desde $y > 0$. Existe una secuencia de precios positiva (p) que cumple (G) *y* (M) *si y sólo si*

(i) $x_t > 0$, $y_t > 0$, $c_t > 0$ para $t \geqslant 0$

(ii) $u'(c_t) = \delta u'(c_{t+1}) f'(x_t)$ para $t \geqslant 0$ (RE)

Demostración: *(Necesidad)* Utilizando (U.3) y (G), $c_t > 0$ para $t \geqslant 0$. Como $y_t > c_t$, obtenemos $y_t > 0$ para $t \geqslant 0$. Utilizando (F.2), $x_t > 0$ para $t \geqslant 0$. Esto establece (i).

Utilizando (G) y $c_t > 0$, se obtiene

$$p_t = \delta^t u'(c_t) \quad \text{para } t \geqslant 0$$

Utilizando (M) y $x_t > 0$, se obtiene

$$p_{t+1} = p_t f'(x_t) \quad \text{para } t \geqslant 0$$

Combinando las dos ecuaciones se establece (ii).

(Suficiencia) Sea $p_t = \delta^t u'(c_t)$ para $t \geqslant 0$. Esto define una secuencia de precios positiva, utilizando (i). Ahora, utilizando (ii), se obtiene

$$p_{t+1} = p_t f'(x_t) \quad \text{para } t \geqslant 0 \tag{4.4}$$

Dado cualquier $t \geqslant 0$ y $c \geqslant 0$ la concavidad de u conduce a

$$\delta^t [u(c) - u(c_t)] \leqslant \delta^t u'(c_t)(c - c_t) = p_t(c - c_t)$$

tal que (G) se sigue al transponer términos. Dado cualquier $t \geqslant 0$ y $x \geqslant 0$, la concavidad de f conduce a

$$p_{t+1}[f(x) - f(x_t)] \leqslant p_{t+1} f'(x_t)(x - x_t) = p_t(x - x_t)$$

utilizando (4.4). Así, (M) se sigue al transponer términos.

Nota: La condición (RE), conocida como la condición de Ramsey-Euler, afirma la igualdad entre el producto marginal del input y la tasa marginal de sustitución intertemporal en el lado del consumo.

Ahora, estamos en disposición de establecer la inversa de la proposición 4.1.

Proposición 4.2

Supongamos que (x, y, c) es un programa óptimo desde $\bar{y} > 0$. Entonces, existe una secuencia de precios positiva $\mathbf{p} = (p_t)$ *que cumple* (G) *y* (M), *y*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t x_t = 0 \quad (\textit{cuando } 0 < \delta < 1) \tag{IF}$$

$$\sup_{t \geqslant 0} p_t x_t < \infty \quad (\textit{cuando } \delta = 1) \tag{BCV}$$

Demostración: Como (x, y, c) es óptimo desde $\bar{y} > 0$, $0 < c_t < y_t$ para todo $t \geqslant 0$, utilizando el Lema (3.7) (ii). Utilizando (F.2), $x_t > 0$ para $t \geqslant 0$.

Como (x, y, c) es óptimo desde $\bar{y} > 0$, para cada $t \geqslant 0$, x_t debe maximizar

$$W(x) \equiv \delta^t u(y_t - x) + \delta^{t+1} u(f(x) - x_{t+1})$$

entre todas las x que cumplan $0 \leqslant x \leqslant y_t$ y $f(x) \geqslant x_{t+1}$. Puesto que $c_t > 0$ y $c_{t+1} > 0$, se alcanza el máximo en un punto interior. Así, $W'(x_t) = 0$, que se puede escribir como

$$\delta^t u'(c_t) = \delta^{t+1} u'(c_{t+1}) f'(x_t)$$

Así, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ cumple (i) y (ii) del Lema 4.1. En consecuencia, existe una secuencia de precios positiva $\mathbf{p} = (p_t)$ que cumple (G) y (M). De hecho, utilizando (G), y $c_t > 0$, tenemos

$$p_t = \delta^t u'(c_t) \quad \text{para } t \geqslant 0$$

Utilizando el Lema 3.7 (iii) obtenemos también

$$p_t = \delta^t V'(y_t) \quad \text{para } t \geqslant 0 \tag{4.5}$$

Utilizando la concavidad de V y (4.5), obtenemos para cualquier $y > 0$

$$\delta^t [V(y) - V(y_t)] \leqslant \delta^t V'(y_t)(y - y_t) = p_t(y - y_t)$$

Así, para todo $t \geqslant 0$, y cualquier $y > 0$

$$\delta^t V(y) - p_t y \leqslant \delta^t V(y_t) - p_t y_t \tag{4.6}$$

Eligiendo $y = (y_t/2)$ en (4.6), obtenemos

$$(1/2) p_t y_t \leqslant \delta^t [V(y_t) - V(y_t/2)] \tag{4.7}$$

Si $0 < \delta < 1$, $V(y_t) \leqslant [u(K(\bar{y}))/(1 - \delta)]$ y $V(y_t/2) \geqslant 0$ para $t \geqslant 0$ (ver la Sección III.d.1). Entonces (4.7) cumple la condición (IF), ya que $0 \leqslant x_t \leqslant y_t$ para $t \geqslant 0$.

Si $\delta = 1$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ es bueno (utilizando el Lema 3.3) y así $x_t \to x^*$, $y_t \to y^*$ y $c_t \to c^*$ cuando $t \to \infty$ (utilizando el Lema 3.4). Así, $p_t y_t \to u'(c^*) y^*$ cuando $t \to \infty$. Esto cumple (BCV), ya que $0 \leqslant x_t < y_t$ para $t \geqslant 0$.

Cuando se está interesado en alcanzar el programa óptimo por medio de un sistema de toma de decisiones intertemporal descentralizado y guiado por los precios, la verificación del futuro insignificante (IF) o de la condición del valor del capital limitado (BCV) plantea dificultades conceptuales similares a las que encontró Koopmans y que recordamos anteriormente en el contexto de la eficiencia intertemporal. El problema de diseñar una «regla descentralizable» del comportamiento miope de las empresas o consumidores sigue ocupando la atención de los investigadores (ver Kurz y Starret, 1970, Starret, 1968). Sin

embargo, sólo recientemente se han alcanzado avances significativos en diseñar mecanismos de asignación de recursos «descentralizados» que puedan detectar la ineficiencia o no optimalidad a largo plazo de los programas competitivos a través de una secuencia de «verificaciones» período a período. (En la Sección VI se tratan definiciones formales de estos conceptos.) Revisaremos ahora algunos resultados de «posibilidad» de verificación de la optimalidad de programas compet'tivos presentados en el *Simposium* (sobre descentralización intertemporal) del *Journal of Economic Theory* (1988). Seguimos centrándonos en el caso en el que la función de utilidad es «estrictamente creciente» (es decir, u cumple (U.1), (U.2$^+$) y (U.3)). La regla de verificación particular período a período, que ha figurado en lugar destacado en la literatura, puede ser abordada de la siguiente manera.

Una importante propiedad de monotocidad de los programas óptimos (ver Mitra, 1979) ès la siguiente: sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ óptimo desde $y > 0$ y $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{c}')$ óptimo desde $y' > 0$. Si $y > y'$, se tiene:

$$x_t \geqslant x'_t,\ y_t \geqq y'_t,\ x_t \geqq c'_t \quad \text{para todo } t \in N \tag{4.8}$$

Dado $0 < \delta \leqslant 1$, el programa estacionario $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{c}^*)$ definido en (GR) es óptimo desde y^*_δ. Se sigue que si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ es óptimo desde y, $p^*_t = \delta^t u'(c^*_\delta)$, y $p_t = \delta^t u'(c_t)$, entonces

$$(p_t - p^*_t)(y_t - y^*_\delta) \leqq 0 \quad \text{para todo } t \in N \tag{S}$$

De hecho, se puede mostrar que la condición (S) *define completamente* todos los programas competitivos que son óptimos.

Proposición 4.3

Un programa competitivo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ *desde* $y > 0$ *es óptimo si y sólo si*

$$(p_t - p^*_t)(y_t - y^*_\delta) \leqslant 0 \quad \textit{para todo } t \in N \tag{S}$$

Un esbozo de una demostración elemental (acerca del caso descontado y el no descontado en un esquema simple) se puede consultar en Majumdar (1987). Una caracterización alternativa es la siguiente:

Proposición 4.4

Un programa competitivo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ *desde* $y > 0$ *es óptimo si y sólo si*

$$x_{t+1} \gtreqless x_t \quad \text{siempre que } x_t \gtreqless x^*_\delta \quad \text{para todo } t \in N \tag{4.9}$$

V. El papel de los precios competitivos en la consecución de la optimalidad: algunos resultados del caso estrictamente cóncavo

En nuestro esquema, se pueden reforzar aún más los resultados de la Sección anterior. En esta Sección queremos señalar que existen alternativas a la condición (S), estudiada anteriormente, que no conciernen al stock de la regla de oro (resp. regla de oro modificada) y_δ^*.

Lema 5.1

Supongamos que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ *es un programa competitivo desde* $y \in (0, K)$.

(i) *Si, para algún* $s \geq 0$, *tenemos* $y_{s+1} > y_s$, $x_s \geq x_\delta^*$, *entonces* $x_{t+1} > x_t$, *y* $y_{t+1} > y_t$ *para todo* $t \geq s$.

(ii) *Si, para algún* $s \geq 0$, *tenemos* $y_{s+1} < y_s$, $x_s < x_\delta^*$, *entonces* $x_{t+1} < x_t$, *y* $y_{t+1} < y_t$ *para todo* $t \geq s$.

Demostración: Demostraremos (i). Supongamos que para algún $s \geq 0$, $y_{s+1} > y_s$ y $x_s > x_\delta^*$. Entonces $\delta f'(x_s) \leq 1$, y utilizando la condición (RE) obtenemos

$$u'(c_s) = \delta f'(x_s) u'(c_{s+1}) \leq u'(c_{s+1})$$

de forma que $c_s \geq c_{s+1}$. Así, $y_s - x_s \geq y_{s+1} - x_{s+1} > y_s - x_{s+1}$, utilizando $y_{s+1} > y_s$. Esto cumple $x_{s+1} > x_s$ y así $y_{s+2} = f(x_{s+1}) > f(x_s) = y_{s+1}$. Así, $x_{s+1} \geq x_\delta^*$ y $y_{s+2} > y_{s+1}$. Podemos repetir este paso para obtener $x_{t+1} > x_t$ y $y_{t+1} > y_t$ para todo $t \geq s$. La demostración de (ii) es similar.

Dado un programa competitivo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ desde $y \in (0, K)$, definamos la *secuencia de precios de valor corriente* $\mathbf{q} = (q_t)$ por

$$q_t = (p_t/\delta^t) \quad \text{para } t \in N$$

Ahora, consideremos la siguiente regla de verificación período a período

$$(q_{t+1} - q_t)(y_{t+1} - y_t) \leq 0 \quad \text{para } t \in N \qquad (S')$$

Al contrario que con la anterior condición (S), esta condición (S′) no implica la apariencia explícita del stock de la regla de oro (o regla modificada de oro) y_δ^* o de precios p_t^*. Mostraremos que un programa competitivo cumple (S′) si y sólo si es óptimo. Conviene observar que un programa competitivo (x, y, c, p) desde $y \in (0, K)$ cumple (S′) si y sólo si cumple

$$(q_{t+1} - q_t)(x_{t+1} - x_t) \leq 0 \quad \text{para } t \in N \qquad (S'')$$

Para ver esto, nótese que por la condición (G) tenemos para $t \in N$

$$u(c_t) - q_t c_t \geq u(c_{t+1}) - q_t c_{t+1}$$
$$u(c_{t+1}) - q_{t+1} c_{t+1} \geq u(c_t) - q_{t+1} c_t$$

Sumando las desigualdades y transponiendo términos, obtenemos

$$(q_{t+1} - q_t)(c_{t+1} - c_t) \leq 0 \quad \text{para } t \in N \qquad (5.1)$$

Así, si se cumple (S″), sumando las desigualdades en (S″) y (5.1), se obtiene (S′).

Para ir en la otra dirección, nótese que por la condición (M), obtenemos para $t \in N$

$$\delta q_{t+1} f(x_t) - q_t x_t \geq \delta q_{t+1} f(x_{t+1}) - q_t x_{t+1}$$
$$\delta q_{t+2} f(x_{t+1}) - q_{t+1} x_{t+1} \geq \delta q_{t+2} f(x_t) - q_{t+1} x_t$$

Sumando las desigualdades y transponiendo términos, obtenemos

$$\delta(q_{t+2} - q_{t+1})(y_{t+2} - y_{t+1}) \geq (q_{t+1} - q_t)(x_{t+1} - x_t) \quad \text{para } t \in N \qquad (5.2)$$

Así, si (S′) se cumple, se sigue de (5.2) que (S″) también se cumple.

Lema 5.2.

Supongamos que (x, y, c, p) *es un programa competitivo desde* $y \in (0, K)$, que cumple (S′).

(i) *Si, para algún* $s \geq 0$, $x_s < x_\delta^*$, *entonces* $x_{s+1} \geq x_s$ *y* $y_{s+1} \geq y_s$.

(ii) *Si, para algún* $s \geq 0$, $x_s > x_\delta^*$, *entonces* $x_{s+1} \leq x_s$ *y* $y_{s+1} \leq y_s$.

Demostración: Demostraremos (i). Supongamos que, para algún $s \geq 0$, $x_s < x_\delta^*$. Entonces $\delta f'(x_s) > 1$. Utilizando la condición (RE), $q_{s+1} = [q_s/\delta f'(x_s)] < q_s$. Utilizando esto en (S′), se obtiene $y_{s+1} \geq y_s$; utilizándolo en (S″) se otiene $x_{s+1} \geq x_s$. La demostración de (ii) es similar.

Utilizando los Lemas 5.1 y 5.2 se puede mostrar que un programa competitivo que cumple (S′) debe converger a la regla de oro (o regla modificada de oro).

Proposición 5.1:

Supongamos que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ *es un programa competitivo desde* $y \in (0, K)$, *que cumple* (S′). *Entonces* $(x_t, y_t, c_t) \to (x_\delta^*, y_\delta^*, c_\delta^*)$ *cuando* $t \to \infty$.

Demostración: Supongamos que $y < y_\delta^*$. Exigimos que

$$x_t < x_\delta^* \quad \text{para } t \in N \qquad (5.3)$$

Por si no se cumple (5.3), sea s el primer período para el que $x_s \geqslant x_\delta^*$. Si $s = 0$, tenemos $y_{s+1} = f(x_s) \geqslant f(x_\delta^*) = y_\delta^* > y = y_s$. Si $s \geqslant 1$, tenemos $x_{s-1} < x_\delta^*$, y así $y_{s+1} = f(x_s) \geqslant f(x_\delta^*) > f(x_{s-1}) = y_s$. Así, en cualquier caso, $y_{s+1} > y_s$. Aplicando el Lema 5.1, $x_{s+1} > x_s \geqslant x_\delta^*$ y $y_{s+2} > y_{s+1}$, que contradice el Lema 5.2. Esto establece nuestra exigencia.

Utilizando (5.3) y el Lema 5.2, podemos concluir que $x_{t+1} \geqslant x_t$ y $x_t \leqslant x_\delta^*$ para $t \geqslant 0$. Así x_t converge a algún $\bar{x}$ que cumple $0 < \bar{x} \leqslant x_\delta^* < K$, y $[f(x_{t-1}) - x_t]$ converge a $[f(\bar{x}) - \bar{x}] > 0$. Utilizando la condición (RE), obtenemos $\delta f'(\bar{x}) = 1$, de forma que $\bar{x} = x_\delta^*$. Así, $x_t \to x_\delta^*$ cuando $t \to \infty$; también, $y_{t+1} = f(x_t) \to f(x_\delta^*) = y_\delta^*$ cuando $t \to \infty$; y $c_t = y_t - x_t \to (y_\delta^* - x_\delta^*) = c_\delta^*$ cuando $t \to \infty$. Cuando $y \geqslant y_\delta^*$, la demostración es similar.

Podemos establecer nuestro principal resultado de la siguiente forma:

Proposición 5.2

Supongamos que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ *es un programa competitivo desde* $y \in (0, K)$ *que cumple* (S′). *Entonces,* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ *es un programa óptimo desde* y.

Demostración: Si $\delta = 1$, la proposición 5.1 implica que $p_t \equiv u'(c_t) \to u'(c^*) = p^*$ cuando $t \to \infty$. También $x_t \to x^*$ cuando $t \to \infty$. Así, la condición (BCV) se cumple claramente, y $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ es óptimo por la proposición 4.1.

Si $0 < \delta < 1$, la proposición 5.1 implica que $q_t = u'(c_t) \to u'(c_\delta^*)$ cuando $t \to \infty$, y así $p_t = \delta^t q_t \to 0$ cuando $t \to \infty$. También $x_t \to x_\delta^*$, de forma que la condición (IF) se cumple claramente, y $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ es óptimo por la proposición 4.1.

Se puede establecer también la inversa de la proposición 5.2, que la presentamos ahora en el siguiente resultado.

Proposición 5.3

Supongamos que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ *es un programa competitivo desde* $y \in (0, K)$, *tal que* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ *es óptimo desde* y. *Entonces* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ *cumple* (S′).

Demostración: Utilizando el Lema 4.1, $x_t > 0$, $y_t > 0$, $c_t > 0$ para $t \in N$. Así, la condición (G) cumple $q_t = u'(c_t)$ para $t \in N$. Utilizando el Lema 3.7, tenemos también $q_t = V'(y_t)$ para $t \in N$.

Como V es cóncava (por el Lema 3.6), tenemos para cualquier $y > 0$, y $t \in N$.

$$V(y) - V(y_t) \leqslant V'(y_t)(y - y_t) = q_t(y - y_t)$$

Transponiendo términos, obtenemos para cualquier $y > 0$, y $t \in N$

$$V(y_t) - q_t y_t \geqslant V(y) - q_t y \tag{5.4}$$

Cojamos cualquier $s \geqslant 0$. Entonces, utilizando (5.4) para $t = s$, y $y = y_{s+1}$,

$$V(y_s) - q_s y_s \geqslant V(y_{s+1}) - q_s y_{s+1} \tag{5.5}$$

Utilizando (5.4) para $t = s + 1$, y $y = y_s$, tenemos

$$V(y_{s+1}) - q_{s+1} y_{s+1} \geqslant V(y_s) - q_{s+1} y_s \tag{5.6}$$

Sumando (5.5) y (5.6) y transponiendo términos,

$$(q_{s+1} - q_s)(y_{s+1} - y_s) \leqslant 0$$

Como cogimos arbitrariamente $s \geqslant 0$, esto establece la condición (S′).

VI. Mecanismos de descentralización intertemporal

El esquema presentado en la Sección II, cuando discutimos los mecanismos de asignación de recursos descentralizados, es flexible: se puede adaptar formalmente al contexto intertemporal de la Sección III, con algunos cambios, de la siguiente manera. Se puede identificar el conjunto de agentes, **I**, como los consumidores y/o productores en la economía intertemporal con horizonte infinito. Podemos especificar el entorno de cada productor como el conjunto de funciones de producción presentadas en la Sección III.b). El entorno inicial del productor puede contener información sobre el stock inicial de la economía. El entorno de cada consumidor se puede especificar como el conjunto de funciones de utilidad presentadas en la Sección III.d). El espacio de asignaciones, **A**, se puede especificar como el espacio al que pertenecerán los programas, principalmente S_+^3.

Los «mecanismos intertemporales descentralizados» se pueden considerar mecanismos descentralizados (en el sentido de la Sección II) aplicados al esquema intertemporal anterior. La correspondencia de objetivo social se puede definir como el conjunto de programas eficientes u óptimos del stock inicial de la economía dado.

La cuestión importante es, entonces, si se pueden diseñar apropiados mecanismos intertemporales descentralizados que alcancen los anteriores objetivos sociales. Presentamos ahora algunos ejemplos para ilustrar cómo podemos abordar esta cuestión, utilizando los resultados sobre programas eficientes y óptimos desarrollados en las tres secciones anteriores. Estos ejemplos indican, también, de una forma precisa cómo se pueden construir mecanismos intertemporales descentralizados, un aspecto que hemos evitado discutir con detalle deliberadamente hasta ahora, en vista de los aspectos técnicos que inevitablemente conlleva.

Ejemplo 6.1

El conjunto de agentes, $\mathbf{I} = \{t \in N\}$. Pensamos en el agente t como un «productor» que vive en el período t. El conjunto de entorno, **E**, se define de la siguiente forma. Sea $E_t = \{f : f$ cumple (F.1)-(F.4)$\}$ para $t \geqslant 1$; sea

$E_0 = \{(y, f): f$ cumple (F.1)-(F.4) y $y \in \mathbb{R}_{++}\}$. Ahora, se define $\mathbf{E}$ como $\{(y, f^\infty): y \in \mathbb{R}_{++}$ y f cumple (F.1)-(F.4)$\}$. Así, $E \subset \prod_{t=0}^{\infty} E_t$, y nuestro entorno dado es *estacionario*. Definamos el espacio de asignaciones, $\mathbf{A}$, como S^3_+.

La correspondencia de objetivo social es la aplicación $Q: \mathbf{E} \to \mathbf{A}$, definida por $Q(e) = \{(x, y, c): (x, y, c)$ es un programa eficiente cuando el entorno es $\mathbf{e}\}$.

Consideremos un mecanismo $\pi = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{H})$ definido de la siguiente forma. Primero, el espacio de mensajes, $\mathbf{M}$, es $S^3_+ \times \hat{S}$, cuyos elementos genéricos se escriben $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$. Luego, la correspondencia de equilibrio, $\boldsymbol{\psi}$, se define así. Para e_0 en E_0, sea $\psi_0(e_0) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ en $\mathbf{M}$: $x_0 + c_0 = y_0$, $y_0 = y$, $y_1 = f(x_0)$ y $p_1 f(x_0) - p_0 x_0 \geqslant p_1 f(x) - p_0 x$ para todo $x \geqslant 0\}$; para e_t en E_t, sea $\psi_t(e_t) = \{(x, y, c, p)$ en $\mathbf{M}$: $x_t + c_t = y_t$, $y_{t+1} = f(x_t)$, y $p_{t+1} f(x_t) - p_t x_t \geqslant p_{t+1} f(x) - p_t x$ para todo $x \geqslant 0\}$ para $t \geqslant 1$. Ahora, dado cualquier $\mathbf{e}$ en $\mathbf{E}$, $\psi(\mathbf{e})$ se define como $\bigcap_{t=0}^{\infty} \psi_t(e_t)$. Dado que existe un programa desde cada $y > 0$, la proposición 3.1 asegura que $\boldsymbol{\psi}$ es no vacío para cada $\mathbf{e}$ en $\mathbf{E}$, como era necesario. Por último, la función de resultado $\mathbf{H}$, se define de la siguiente forma. Para $m = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ en M, $H(m) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$. De esta forma, H es una aplicación de proyección desde $\mathbf{M}$ hasta $\mathbf{A}$. La correspondencia de realización, $\phi(e)$, es el conjunto de programas desde y, por la proposición 3.1.

Claramente, el mecanismo, π, preserva la intimidad por definición. Es insesgado por la proposición 3.1, pero en vista del ejemplo 3.1, no alcanza el objetivo social de eficiencia.

El ejemplo enfatiza que la condición de maximización intertemporal del beneficio (ver (M) en la Sección III) no asegura la eficiencia. En nuestro esquema, no restringe en absoluto la clase de programas.

Ejemplo 6.2

El conjunto de agentes, $\mathbf{I} = \{(t_R, t_c): t \in N\}$. Pensamos en el agente t_R como un «productor» Robinson que vive en el período t, y t_c como un «consumidor» Crusoe que vive en el período t. El conjunto de entornos, $\mathbf{E}$, se define de la siguiente manera. Sea $E_{t_R} = \{(f, \delta): f$ cumple (F.1)$-$(F.4), $y \in (0, 1)\}$ para $t \geqslant 1$; sea $E_{0_R} = \{(y, f, \delta): y \in \mathbb{R}_{++}, f$ cumple (F.1)-(F.4), $y \in (0, 1)\}$. Sea $E_{t_c} = \{u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $u(c) = c$ para $c \in \mathbb{R}_+\}$. Así, $E \subset \prod_{t=0}^{\infty} E_{t_R} \times \prod_{t=0}^{\infty} E_{t_c}$, y el entorno dado es estacionario. El espacio de asignaciones, $\mathbf{A}$, es S^3_+.

La correspondencia de objetivo social es la aplicación $Q: \mathbf{E} \to \mathbf{A}$, definida por $Q(\mathbf{e}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}): (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ es un programa óptimo, cuando el entorno es $\mathbf{e}\}$.

Consideremos un mecanismo $\pi = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{H})$ definido de la siguiente forma. Primero, el espacio de mensajes, $\mathbf{M}$, es $S^3_+ \times \mathbb{R}_{++}$, cuyo elemento genérico se escribe $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{x}^*_\delta)$. Luego, la correspondencia de equilibrio $\boldsymbol{\psi}$ se define de la siguiente forma. Para e_{0_R} en E_{0_n}, sea $\psi_{0_R}(e_{0_R}) = \{(x, y, c, x^*_\delta)$ en $\mathbf{M}: x_0 + c_0 = y_0$, $y_0 = y$, $y_1 = f(x_0)$, $\delta f'(x^*_\delta) = 1$, y $c_0 = \max(y_0 - x^*_\delta, 0)\}$; para e_{t_R} en E_{t_R}, sea $\psi_{t_R}(e_{t_R}) = \{(x, y, c, x^*_\delta)$ en $\mathbf{M}: x_t + c_t = y_t$, $y_{t+1} = f(x_t)$, $\delta f'(x^*_\delta) = 1$, y $c_t = \max(y_t - x^*_\delta, 0)\}$ para $t \geqslant 1$. Para e_{t_c} en E_{t_c}, sea $\psi_{t_c}(e_{t_c})\mathbf{M}$ para $t \geqslant 0$. Ahora, definamos para $\mathbf{e}$ en $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{e}) = \left[\bigcap_{t=0}^{\infty} \psi_{t_R}(e_{t_R})\right] \cap \left[\bigcap_{t=0}^{\infty} \psi_{t_c}(e_{t_c})\right]$. Como existe un input de la regla de oro (o regla modificada de oro; ver la Sección III.b) y existe un programa óptimo desde cualquier $y > 0$ (ver la Sección III.d), el Lema 3.8 asegura que $\boldsymbol{\psi}$ es no-vacío para cada $\mathbf{e}$ en $\mathbf{E}$, como era necesario. Por último, la función de resultados, $\mathbf{H}$, se define para cada $\mathbf{m} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{x}^*_\delta)$ por $\mathbf{H}(\mathbf{m}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$. Así, $\mathbf{H}$ es una aplicación de proyección desde $\mathbf{M}$ hasta $\mathbf{A}$. La correspondencia de realización $\phi(e)$, es el único programa óptimo desde y (utilizando el Lema 3.8).

El mecanismo, π, preserva la intimidad por definición, y alcanza el objetivo social de optimalidad.

Merece la pena hacer un comentario sobre la correspondencia de equilibrio. La idea clave es que la función de política óptima de consumo, g, para este objetivo social se puede escribir explícitamente así:

$$g(y) = \max(y - x^*_\delta, 0) \quad \text{para todo } y > 0$$

donde x^*_δ es el input de la regla de oro ($\delta = 1$) o de la regla de oro modificada ($0 < \delta < 1$) (Lema 3.8). Así, para obtener un mecanismo que alcance el objetivo social, se puede pedir a los productores que verifiquen si $c_t = \max(y_t - x^*_\delta, 0)$ para cada período. Como esto incluye a x^*_δ, que se define como la solución a $\delta f'(x^*_\delta) = 1$, se puede pedir a los productores en cada período que lo calculen, utilizando su conocimiento de δ y f, y utilizarlo entonces en la verificación anterior. Nótese que a los consumidores no se les pide que verifiquen nada; su papel (dada la función de utilidad lineal) es muy limitado en este mecanismo.

Ejemplo 6.3

El conjunto de agentes, I, el espacio de asignaciones, $\mathbf{A}$, y los conjuntos, E_{t_R} (para $t \geqslant 0$), se definen igual que en el ejemplo 6.2. Sea $E_{t_c} = \{u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que u cumple (U.1), (U.2$^+$) y (U.3)$\}$. Ahora, $\mathbf{E}$ se define como $\{(y, f^\infty, \delta^\infty, u^\infty): y \in \mathbb{R}_+$, f cumple (F.1)-(F.4), $\delta \in (0, 1)$, y $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ cumple (U.1), (U.2$^+$) y (U.3)$\}$. El objetivo social es óptimo.

Consideremos un mecanismo $\pi = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{H})$ definido de la siguiente manera. Primero, el espacio de mensajes, $\mathbf{M}$, es $S^4_{++} \times \mathbb{R}^4_{++}$, cuyo elemento genérico se escribe $(x, y, c, q, x^*_\delta, y^*_\delta, c^*_\delta, q^*)$. Luego, sea $\psi_{0_R}(e_{0_R}) = \{(x, y, c, q, x^*_\delta, y^*_\delta, c^*_\delta, q^*)$ en $\mathbf{M}: x_0 + c_0 = y_0$, $y_0 = y$, $\delta q_1 f'(x_0) = q_0$, $\delta f'(x^*_\delta) = 1$, $y^*_\delta = f(x^*_\delta)$, $x^*_\delta + c^*_\delta = y^*_\delta$, y $(q_0 - q^*)(y_0 - y^*_\delta) \leqslant 0\}$. Además, sea $\psi_{t_R}(e_{t_R}) = \{(x, y, c, q, x^*_\delta, y^*_\delta, c^*_\delta, q^*)$ en $\mathbf{M}: x_t + c_t = y_t$, $y_{t+1} = f(x_t)$, $\delta q_{t+1} f'(x_t) = q_t$, $\delta f'(x^*_\delta) = 1$, $y^*_\delta = f(x^*_\delta)$, $x^*_\delta + c^*_\delta = y^*_\delta$, y $(q_t - q^*)(y_t - y^*_\delta) \leqslant 0\}$ para $t \geqslant 1$. Para $t \geqslant 0$, $\psi_{t_c}(e_{t_c}) = \{(x, y, c, q, x^*_\delta, y^*_\delta\ c^*_\delta, q^*)$ en $\mathbf{M}: u'(c_t) = q_t$, $u'(c^*_\delta) = q^*\}$. Ahora, definamos para $\mathbf{e}$ en $\mathbf{E}$,

$$\boldsymbol{\psi}(e) = \left[\bigcap_{t=0}^{\infty} \psi_{t_R}(e_{t_R})\right] \cap \left[\bigcap_{t=0}^{\infty} \psi_{t_c}(e_{t_c})\right].$$

Como existe un input de la regla de oro (o regla de oro modificada), y existe un programa óptimo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ desde cualquier $y > 0$, las proposiciones 4.2 y 4.3 cumplen $(\mathbf{p})$ tal que (G), (M) y (S) se cumplen. Definiendo $(\mathbf{q})$ por $q_t = (p_t/\delta^t)$ para $t \geqslant 0$, se puede comprobar utilizando el Lema 4.1 que $u'(c_t) = q_t$ para $t \geqslant 0$ y $\delta q_t f'(x_{t-1}) = q_{t-1}$ para $t \geqslant 1$. Así, $\psi(\mathbf{e})$ es no vacío, como se necesitaba.

La función de resultados, $\mathbf{H}$, se define para cada $m = (x, y, c, q, x_\delta^*, y_s^*, c_\delta^*, q^*)$ por $H(m) = (x, y, c)$. De esta forma, $\mathbf{H}$ es una aplicación desde $\mathbf{M}$ hasta $\mathbf{A}$. La correspondencia de realización, $\phi(e)$, es el único programa desde y, utilizando el Lema 4.1 y las proposiciones 4.2 y 4.3.

El mecanismo, π, preserva la intimidad por definición, y alcanza el objetivo social de optimalidad.

La idea clave utilizada aquí es que los programas óptimos se pueden caracterizar mediante las condiciones (G), (M) y (S) (además de la viabilidad). Así, para obtener un mecanismo que alcance el objetivo social, se puede pedir a los consumidores que comprueben (G) y a los productores que comprueben (M) y (G) y la viabilidad. Ahora, (S) misma implica el stock de la regla de oro (o regla de oro modificada) y el precio. Así como no se puede pedir a los productores que los calculen ellos sólos (como hicimos en el ejemplo 6.2), podemos obtenerlos mediante un mecanismo que preserve la intimidad que implique a consumidores y productores (pidiéndoles que comprueben $\delta f'(x_\delta^*) = 1$, $y_\delta^* = f(x_\delta^*)$ y $x_\delta^* + c_\delta^* = y_\delta^*$, y pidiendo a los consumidores que comprueben $u'(c_\delta^*) = q^*$). Se pueden utilizar, entonces, las magnitudes para comprobar la condición (S) para cada período.

Ejemplo 6.4

El conjunto de agentes y el espacio de asignaciones se describen como en el ejemplo 6.3. Para definir el conjunto de entornos, sea $\xi > 0$ un número real dado, y $\bar{k}$ otro número real dado tal que $0 < \bar{k} < \xi$. Definamos $\mathscr{F} = \{f : \text{cumple (F.1)-(F.4) y } f(\bar{k}) > \bar{k},\ f(\xi) < \xi,\ f'(\bar{k}) < 1\}$. Sea $E_{t_R} = \{(f, \delta) : f \in \mathscr{F} \text{ y } \delta \in (0, 1)\}$ para $t \geqslant 1$; sea $E_{0_R} = \{(y, f, \delta) : y \in (0, \bar{k}),\ f \in \mathscr{F} \text{ y } \delta \in (0, 1)\}$. Además, sea $E_{t_c} = \{u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que u cumple (U.1), (U.2$^+$) y (U.3). Ahora, definimos $\mathbf{E}$ como $\{(\mathbf{y}, f^\infty, \delta^\infty, u^\infty) : y \in (0, \bar{k}),\ f \in \mathscr{F},\ \delta \in (0, 1),$ y $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ cumple (U.1), (U.2$^+$) y (U.3)$\}$. El objetivo social es óptimo.

Consideremos un mecanismo $\pi = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{H})$ definido de la siguiente manera. El espacio de mensajes es $\mathbf{M} = S_{++}^4$ que se escribe genéricamente $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{q})$. Luego, sea $\psi_{0_R}(e_{0_R}) = \{(x, y, c, q)$ en $\mathbf{M} : x_0 + c_0 = y_0,\ y_0 = y,\ y_1 = f(x_0),\ \delta q_1 f'(x_0) = q_0,$ y $(q_1 - q_0)(y_1 - y_0) \leqslant 0\}$. Además, sea $\psi_{t_R}(e_{t_R}) = \{(x, y, c, q)$ en $\mathbf{M} : x_t + c_t = y_t,\ y_{t+1} = f(x_t),\ \delta q_{t+1} f'(x_t) = q_t,$ y $(q_{t+1} - q_t)(y_{t+1} - y_t) \leqslant 0\}$ para $t \geqslant 1$. Para $t \geqslant 0$, $\psi_{t_c}(e_{t_c}) = \{(x, y, c, q)$ en $\mathbf{M} : u'(c_t) = q_t\}$. Ahora, definamos

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{e}) = \left[\bigcap_{t=0}^{\infty} \psi_{t_R}(e_{t_R})\right] \cap \left[\bigcap_{t=0}^{\infty} \psi_{t_c}(e_{t_c})\right].$$

Como existe un programa óptimo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ desde $y \in (0, \bar{k})$, la proposición 4.2 cumple $(\mathbf{p})$ tal que se cumplen (G) y (M). Definiendo $(\mathbf{q})$ por $q_t = (p_t/\delta^t)$ para $t \geqslant 0$, se puede utilizar el Lema 4.1 para comprobar que $u'(c_t) = q_t$ para $t \geqslant 0$ y $\delta q_t f'(x_{t-1}) = q_{t-1}$ para $t \geqslant 1$. La proposición 5.3 asegura que se cumple la condición (S'). Así, $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{e})$ es no vacío, como era necesario.

La función de resultado, $\mathbf{H}$, se define para cada $\mathbf{m} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{q})$ por $H(\mathbf{m}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$. Así, $\mathbf{H}$ es una correspondencia desde $\mathbf{M}$ hasta $\mathbf{A}$. La correspondencia de realización, $\phi(e)$, es el único programa óptimo desde y, utilizando el Lema 4.1 y las proposiciones 4.2 y 5.2.

El mecanismo, π, preserva la intimidad por definición, y alcanza el objetivo social de optimalidad.

Como la condición (S') no implica (al contrario que la condición (S)) el stock y el precio de la regla de oro (o regla de oro modificada), el mecanismo estudiado en este ejemplo puede operar con un espacio de mensajes de menor dimensión comparado con el mecanismo utilizado en el ejemplo 6.3. Además, los agentes tienen que verificar menos reglas en la operación de este mecanismo en comparación con el mecanismo utilizado en el ejemplo 6.3. Por otra parte, si consideramos el conjunto de entornos para los que hemos sido capaces de demostrar que cada mecanismo alcanza el objetivo social de optimalidad, encontramos que el conjunto en este ejemplo es más pequeño que el conjunto del ejemplo 6.3.

VII. Mecanismos intertemporales con información incompleta: un resultado de imposibilidad

En la sección anterior mostramos cómo el esquema de mecanismos descentralizados de asignación de recursos puede ser adaptado formalmente al contexto intertemporal. Sin embargo, una vez que nos preguntamos cuántos mecanismos operarían en un horizonte infinito, ocurre que el «escenario de verificación» sería uno no pausible.

Consideremos, por ejemplo, el mecanismo del ejemplo 6.4. Consideremos, de hecho, el caso fortuito en el que se propone un mensaje de *equilibrio*. Todos los agentes desde ahora hasta el infinito tienen que verificar que el mensaje es de hecho de equilibrio. Pero, a la fecha de hoy, no todos los agentes están presentes —muchos no han nacido todavía. Para una economía con horizonte infinito, el esperar hasta que se completa la verificación antes de llevar a cabo la asignación de equilibrio es realmente «... una prescripción para la parálisis económica antes que un modelo realista del comportamiento económico...» (Hurwicz y Weinberger, 1990, pág. 317).

Para solucionar esta dificultad, está claro que tenemos que restringir drásticamente la clase de mecanismos que son aceptables, en el contexto intertemporal, para reflejar el comportamiento económico realista. Esta línea de razonamiento ha conducido a investigar básicamente en dos direcciones, la primera de las cuales (un resultado de imposibilidad para entornos no estacionarios) estudiamos en esta sección, dejando la segunda (un resultado de posibilidad para un entorno estacionario) para la sección siguiente.

Con el fin de discutir formalmente la primera línea de la argumentación, sea $\xi > 0$ un número real, y definamos $\mathscr{F} = \{f : f \text{ cumple (F.1)} - \text{(F.4), y } f(x) \leqslant x \text{ para } x \geqslant \xi\}$. Denotamos una secuencia $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$, donde $f_t \in \mathscr{F}$ para $t \geqslant 0$, por f. Definamos $\mathbf{U} = \{u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que cumple (U.1), (U.2$^+$) y (U.3)$\}$.

Consideremos, ahora, una economía intertemporal en la que el conjunto de agentes, $\mathbf{I} = \{t \in N\}$, el espacio de asignaciones, **A**, es $\mathbb{R}^3_+$ y el conjunto de entornos, **E**, es $\{(\mathbf{f}, u, \delta, y): f_t \in \mathscr{F}$ para $t \geqslant 0$, $u \in \mathbf{U}$, $\delta \in (0, 1)$ y $y \in \mathbb{R}_{++}\}$. En concreto, entonces, se está teniendo en cuenta el *cambio* tecnológico en el conjunto de entornos. Dado **e** en **E** un programa **(x, y, c)** es una sucesión que cumple

$$y_0 = y,\ x_t + c_t = y_t,\ y_{t+1} = f_t(x_t),\ (x_t, c_t) \geqslant 0 \quad \text{para } t \geqslant 0$$

Un programa óptimo se define como antes (ver (3.14)). Dada nuestra definición de $\mathscr{F}$, es rutinario comprobar, siguiendo el método de la demostración de la proposición 3.3, que existe un único programa óptimo, dado un entorno **e** en **E**.

Centrémonos en un objetivo social más limitado. La función de objetivo social $Q: \mathbf{E} \to \mathbf{A}$ se define de la siguiente forma. Para $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$,

$$Q(\mathbf{e}) = \{(x_0, y_0, c_0): (x, y, c) \text{ es el programa óptimo, dado } \mathbf{e}\}$$

Así, el objetivo social simplemente es alcanzar la asignación óptima *en el período inicial.*

Se puede mostrar que el objetivo social es «sensible» a un cambio en el entorno. Esto se puede formular de la siguiente manera. Dada cualquier función de producción, $f \in \mathscr{F}$, podemos definir $F:^s \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ por $F(x) = [f(x)]^\alpha$ para algún $0 < \alpha < 1$; entonces, $F \in \mathscr{F}$. Dado cualquier número entero $\tau \geqslant 1$, se puede entonces definir $f(\tau) = (f_0(\tau), f_1(\tau), f_2(\tau), ...)$ *por* $f_t(\tau) = f$ para $t = 0, ..., \tau$ y $f_t(\tau) = F$ para $t > \tau$.

Proposición 7.1

Sea $\tau \geqslant 1$ *cualquier número entero. Dada* $f \in \mathscr{F}$, $u \in \mathbf{U}$, *y* $0 < \delta < 1$, *existe* $y > 0$ *tal que para los entornos* $e \equiv (f^\infty, u, \delta, y)$ *y* $e(\tau) = (f(r), u, \delta, y)$ *en* **E**, $Q(e) \neq Q(e(\tau))$.

Nos interesa ahora alcanzar este objetivo social construyendo un mecanismo apropiado para *el período inicial.* Al contrario que en los mecanismos intertemporales de la sección anterior, restringimos este mecanismo al requerir que su mensaje y producto de equilibrio se *determinen completamente por el agente que vive en el período inicial.* Con respecto al agente que vive en el período inicial, suponemos, de acuerdo con la realidad, que tiene menos que información completa de acuerdo con la realidad, que tiene menos que información completa sobre el entorno. Específicamente, existe un número entero positivo T tal que las funciones de producción, f_t, para $t > T$ son desconocidas para él. Formalmente, dada **f**, denotamos $(f_1, ..., f_T)$ por $\mathbf{f}^T$. Definimos ahora el entorno del agente cero, para **e** en **E**, por $E_0(e) = \{(f^T, u, \delta, y): e = (f, u, \delta, y)\}$, y $E_0 = E_0(E)$.

Nótese cuánta información le permitimos poseer al agente cero. Conoce la función de utilidad, el factor de descuento y las funciones de producción hasta algún número finito T. De esta forma, no se está insistiendo en la separación de información entre «consumidores» y «productores». Estamos insistiendo en que el agente no conoce **e** completamente, siendo **e** el entorno actual, y nuestra definición de $\mathbf{E}_0(\mathbf{e})$ recoge esto de una manera mínimamente restrictiva.

Representemos un mecanismo para el período inicial por $\pi_0 = (M_0, \psi_0, \in H_0)$, donde ψ_0 es una aplicación no vacía desde E_0 hasta M_0, y H_0 es una aplicación desde M_0 hasta **A**. Estamos ahora en disposición de establecer un resultado de la imposibilidad de alcanzar el objetivo social mediante cualquier mecanismo. La idea es en esencia simple. Si consideramos dos entornos que difieren únicamente en sus funciones de producción más allá de T, el agente que vive en el período cero no puede conocer la diferencia. Si un mecanismo fuera a alcanzar el objetivo social para cada entorno, entonces la función de objetivo social debe cumplir la misma asignación del período cero para ambos entornos. Pero, esto contradice el resultado establecido en la proposición 7.1 acerca de la sensibilidad de la función de objetivo social a un cambio en el entorno.

Proposición 7.2:

No existe ningún mecanismo que pueda alcanzar el objetivo social.

Demostración: Supongamos un mecanismo $\pi_0 = (M_0, \psi_0, H_0)$ que alcanza el objetivo social. sea $\tau > T$ cualquier número entero. Dada $f \in \mathscr{F}$, $u \in \mathbf{U}$, y $0 < \delta < 1$, se puede encontrar (por la proposición 7.1) $y > 0$, tal que para los entornos $e \equiv (f^\infty, u, \delta, y)$ y $e(\tau) \equiv (f(\tau), u, \delta, y)$ y $Q(e) \neq Q(e(\tau))$.

Ahora, como π_0 alcanza Q, y Q es una función, la correspondencia de realización ϕ es una función que cumple

$$\phi(E_0(e)) = Q(e)$$
$$\phi(E_0(e(\tau))) = Q(e(\tau))$$

Pero, como $E_0(e) = E_0(e(\tau))$, las anteriores igualdades implican que $Q(e) = (e(\tau))$, una contradicción.

La discusión anterior proporciona una idea de los resultados de imposibilidad que se pueden obtener cuando los agentes tienen información incompleta sobre el entorno, y las asignaciones de equilibrio en un período se deciden por los agentes actualmente vivos. Para un tratamiento más exhaustivo, el lector puede consultar Hurwicz y Majumdar (1988).

VIII. Mecanismos evolutivos descentralizados

Hemos señalado en la sección anterior el tipo de restricciones que necesitamos imponer a los mecanismos para que sean plausibles en el contexto intertemporal. En esta sección, desarrollamos este tema de una manera más completa al presentar el concepto de «mecanismos evolutivos descentralizados».

Lo que nos gustaría formalizar ahora es el concepto de *sucesión de mecanismos, una para cada período de tiempo, tal que sólo los agentes vivos en una fecha* *dada deciden la asignación de equilibrio del mecanismo en esa fecha.* Además, esta asignación de equilibrio se lleva a cabo realmente en esa fecha, y es, por lo tanto, independiente de las opiniones (verificaciones) de los agentes futuros.

Al formalizar la idea anterior, surge una cuestión acerca del tratamiento del «stock inicial». Nótese que en nuestra discusión de los mecanismos intertemporales en la Sección VI y al construir un mecanismo para el período inicial en la Sección VII, el stock inicial se trató como parte del entorno del productor en el período inicial. Cuando consideramos el mecanismo para la fecha $t = 1$, su «stock inicial» (y_1) *se determina por el resultado de equilibrio del mecanismo a la fecha* $t = 0$. De esta forma, la dificultad de tratarle como una parte del entorno del productor a la fecha $t = 1$ es que entonces el entorno para $t = 1$ se convierte en dependiente del mecanismo utilizado en la fecha $t = 0$. La correspondencia de objetivo social, que se define sobre el entorno de la economía intertemporal, sucesivamente se convierte en dependiente del mecanismo utilizado en la fecha $t = 0$. Así, ya no hay una manera significativa en la que la realización de un mecanismo pueda ser juzgada en términos de realización de objetivos sociales, ya que el último concepto es ahora *dependiente* del primero.

No hay duda de que para cualquier operación sensible del mecanismo a la fecha $t = 1$, los agentes a la fecha $t = 1$ deben conocer su «stock inicial», y_1. De esta forma, lo que parece que se pretende es tratar y_1 como algo a determinar a la fecha $t = 0$ (mediante el mecanismo que opere en el período inicial), pero como algo que es «conocimiento común» (como un hecho históricamente registrado) a la fecha $t = 1$. La forma más conveniente de hacer esto es tratar al stock como una «variable estado», e incluir en nuestra discusión de los mecanismos un «espacio de estados» factible.

Procedemos ahora a formalizar los conceptos anteriores al definir un mecanismo evolutivo. A esto le sigue una discusión informal de cuánto se supone que opera un mecanismo.

Consideramos los siguientes elementos: un *conjunto de agentes,* $\mathbf{I} = \{(t_c, t_R) : t \in N\}$, un *conjunto de entornos,* $\mathbf{E} \subset \prod_{t=0}^{\infty} (E_{t_c} \times E_{t_R})$, un *espacio de asignaciones,* $\mathbf{A} = \prod_{t=0}^{\infty} A_t$, y un *espacio de estados,* $\mathbf{S} = \prod_{t=0}^{\infty} S_t$. Consideramos a A_t un subconjunto de un espacio real de dimensión finita $\mathbb{R}^n$, y a S_t un subconjunto de un espacio real de dimensión finita $\mathbb{R}^q$, para $t \in N$.

Un *mecanismo evolutivo* es una secuencia $\pi = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{H})$ donde:

(a) M_t, el espacio de mensajes en el período t, es un subconjunto de un espacio real de dimensión finita, que se denota por $\mathbb{R}^m$.

(b) ψ_t, la *función de equilibrio* en el período t, es una aplicación no vacía desde $E_t \times S_t$ hasta M_t.

(c) $H_t \equiv (H_t^1, H_t^2)$, la *función de resultado* en el período t, es una aplicación desde M_t hasta $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l$, tal que $H_t(m_t) \in S_t \times A_t$ si $m_t = \psi_t(e_t, s_t)$.

Dado π, la *función de realización en el período t,* ϕ_t, se define para cada $(e_t, s_t) \in E_t \times S_t$ por $\phi_t(e_t, s_t) = \{H_t(m_t) : m_t = \psi_t(e_t, s_t)\}$.

De esta forma, dados $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$ y $s \in S_0$, un mecanismo π genera una *sucesión de estados* $\mathbf{s}$ por

$$S_0 = S,\ S_{t+1} = \phi_t^1(e_t, s_t) \quad \text{para } t \in \mathbf{N}$$

y una *sucesión de asignaciones* $\mathbf{a}$ por

$$a_t = \phi_t^2(e_t, s_t) \quad \text{para } t \in \mathbf{N}$$

Dado π, la *función de realización* $\boldsymbol{\phi}$ desde $\mathbf{E} \times S_0$ hasta $\mathbf{S} \times \mathbf{A}$ se define por $\phi(e, s) = \{s, a) : \mathbf{s}$ es la sucesión de estados y $\mathbf{a}$ es la sucesión de asignaciones generadas por $\pi\}$.

La definición anterior de un mecanismo evolutivo es similar en su espíritu al concepto de «proceso evolutivo» presentado por Hurwicz y Weinberger (1990, pág. 317). Sin embargo, al incorporar explícitamente el espacio de estados y la variable de estado al definir el mecanismo, nuestra definición es algo diferente de las de ellos.

La restricción de dimensión en el espacio de mensajes refleja el concepto de que la transmisión y el uso de la información son costosos y los agentes pueden procesar solamente una cantidad finita de información en cada período.

El mecanismo evolutivo *preserva la intimidad* o es *descentralizado* si existen correspondencias de equilibrio $\psi_{t_c} : E_{t_c} \times S_t \to M_t$ y $\psi_{t_R} : E_{t_R} \times S_t \to M_t$ para todo $t \in N$ tal que

$$\psi_t(e_{t_c}, e_{t_R}, s_t) = \psi_{t_c}(e_{t_c}, s_t) \cap \psi_{t_R}(e_{t_R}, s_t)$$

para todo (e_{t_c}, e_{t_R}, s_t) en $E_{t_c} \times E_{t_R} \times S_t$.

Para ver como opera este mecanismo, consideremos que están dados un entorno, e_0, y un estado, s_0, para el período cero. El entorno describiría las preferencias de los consumidores y las posibilidades tecnológicas de los productores en el período cero. El estado describiría los stocks de diversos bienes disponibles al principio del período cero.

Se propone un mensaje m_0 a los agentes en el período cero. Los agentes, conociendo sus respectivos entornos, e_{0_R} y e_{0_c}, y el estado, s_0 (que es «de conocimiento común»), comprueban si $m_0 = \psi_{0_c}(e_{0_c}, s_0)$ y $m_0 = \psi_{0_R}(e_{0_R}, s_0)$. Si es afirmativo, entonces m_0 es el mensaje de equilibrio, y la función de resultado H_0^1 especifica un estado s_1 en s_1, y H_0^2 especifica una asignación a_0 en A_0 consistente en las decisiones de consumo/inversión. Este par estado, asignación es el resultado de equilibrio del período cero. Se entiende que el resultado de equilibrio se lleva realmente a cabo en el período cero, y el estado s_1 se alcanza realmente (al principio del período 1). El proceso anterior se repite, entonces, para $t = 1, 2, 3, ...$

Una *correspondencia de objetivo social* es una aplicación Q desde $\mathbf{E} \times S_0$ hasta $\mathbf{S} \times \mathbf{A}$. El mecanismo π, *alcanza* Q si para cada (e, s_0) en $\mathbf{E} \times S_0$, $\phi(e, s_0)$ pertenece a $Q(e, s_0)$.

Examinamos ahora cómo se pueden aplicar los anteriores conceptos a nuestro esquema intertemporal simple de un bien. Advertimos, ahora mismo, que en vista del resultado de imposibilidad estudiado en la Sección VII, no parece haber ninguna esperanza de alcanzar la optimalidad en un entorno no estacionario. Así, en adelante fijaremos nuestra atención en entornos estacionarios. Definamos una clase de funciones de producción, $\mathscr{F}$, y una clase de funciones de utilidad, $\mathbf{U}$, como en el ejemplo 6.4.

Consideremos un esquema en el que $E_{t_R} = \{f, \delta) : f \in \mathscr{F}$ y $0 < \delta < 1\}$, $E_{t_c} = \{u : u \in \mathbf{U}$, y $\mathbf{E} = \{(u^\infty, f^\infty, \delta^\infty) : u \in \mathbf{U}, f \in \mathscr{F}$ y $0 < \delta < 1\}$. Además, sea $A_t = \mathbb{R}^2_+$ y $s_t = (0, \bar{k})$ para $t \in N$. Por último, definamos $Q(e, y) = \{(y, x, c) : (x, y, c)$ es el programa óptimo, dado $(\mathbf{e}, y)\}$. El resultado de Hurwicz y Weinberger (1990) indicaría que no existe ningún mecanismo evolutivo descentralizado que alcance el objetivo social. (Nuestra afirmación es deliberadamente cualificada, ya que la clase de entornos considerada por Hurwicz-Weinberger no es exactamente $\mathbf{E}$, y también porque ellos imponen algunas condiciones de «regularidad» sobre los mecanismos evolutivos que tienen en cuenta.)

Nos podríamos preguntar, en vista del resultado negativo que acabamos de establecer, si existe *algún* mecanismo evolutivo descentralizado cuyos resultados tengan algunas propiedades normativas interesantes. Esta es la principal preocupación de Bala, Majumdar y Mitra (1990), cuyo resultado se puede describir de la siguiente forma.

Consideremos un esquema en el que $E_{t_R} = \{(f, \delta) : f \in \mathscr{F}$ y $\delta = 1\}$, $E_{t_c} = \{u : u \in \mathbf{U}\}$ y $\mathbf{E} = \{u^\infty, f^\infty, \delta^\infty) : u \in \mathbf{U}, f \in \mathscr{F}$ y $\delta = 1\}$. Además, sea $A_t = \mathbb{R}^2_+$ y $S_t = (0, \bar{k})$ para $t \in N$. Por último, definamos $Q(e, y) = \{(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{c}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ es un programa eficiente, y

$$\liminf_{T \to \infty} T^{-1} \sum_{0}^{T} u(c_t) \geqslant \liminf_{T \to \infty} T^{-1} \sum_{0}^{T} u(c'_t)$$

para todos los programas $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{c}')$, dado $(\mathbf{e}, y)\}$. De esta forma, el objetivo social es alcanzar un programa eficiente que maximize también la utilidad media a largo plazo entre todos los programas, dado el entorno, $\mathbf{e}$, y el stock inicial, y.

Bala, Majumdar y Mitra (1990) construyen un mecanismo evolutivo descentralizado que alcanza el anterior objetivo social. El mecanismo se basa en una versión particularmente simple de la revisión continua planificada, estudiada por Goldman (1968) y otros. Este mecanismo $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{H})$ se define de la siguiente forma. El espacio de mensajes a la fecha t, $M_t = \mathbb{R}^6_{++}$ para $t \in N$; escribimos el elemento genérico de M_t como $m_t = (x_t, c_t, x_{t+1}, d_{t+1}, y_{t+1}, r_t)$. Luego, la correspondencia de equilibrio del consumidor a la fecha t, ψ_{t_c}, está dado por $\psi_{t_c}(e_{t_c}, y_t) = \{m_t \in M_t : u'(c_t) = r_t u'(d_{t+1})\}$; la correspondencia de equilibrio del productor a la fecha t, ψ_{t_R}, está dada por $\psi_{t_R}(e_{t_R}, y_t) = \{m_t \in M_t; x_t + c_t = y_t, f(x_t) = y_{t+1}, x_{t+1} + d_{t+1} = y_{t+1}, f(x_{t+1}) = y_t, f'(x_t) = r_t\}$ para $t \in N$, y $\psi_t(e_{t_c}, e_{t_R}, y_t) = \psi_{t_c}(e_{t_c}, y_t) \cap \psi_{t_R}(e_{t_R}, y_t)$ para $t \in N$. Por último, la función de resultado, H_t, está dada por $H_t(m_t) = (y_{t+1}, x_t, c_t)$ para $t \in N$.

Se puede comprobar formalmente que $\boldsymbol{\pi}$ cumple la definición de un mecanismo evolutivo descentralizado y $\boldsymbol{\pi}$ alcanza el objetivo social definido anteriormente. (Los detalles los ofrece Bala, Majumdar y Mitra (1990)). Hacemos las siguientes notas algo informales sobre el mecanismo. En el período t, dado el mensaje m_t, se le pide al consumidor que verifique $[u'(c_t)/u'(d_{t+1})] = r_t$. El consumidor, conociendo u, puede con seguridad hacer esta verificación, que simplemente es la igualdad de la tasa marginal de sustitución con un adecuado ratio de precios «sombra», r_t. Al productor se le pide que verifique $x_t + c_t = y_t$, $f(x_t) = y_{t+1}$, $x_{t+1} + d_{t+1} = y_{t+1}$, $f(x_{t+1}) = y_t$ y $f'(x_t) = r_t$. Las primeras cuatro condiciones son verificaciones de factibilidad. La última condición es la igualdad de la tasa marginal de transformación con un adecuado ratio de precios «sombra», r_t. El productor, conociendo f y y_t, puede hacer estas verificaciones. Las anteriores verificaciones implican que $x_t + c_t =$, $f(x_t) = y_{t+1}$, $x_{t+1} + d_{t+1} = y_{t+1}$, $f(x_{t+1}) = y_t$ y $[u'(c_t)/u'(d_{t+1})] = f'(x_t)$. Pero, estas condiciones caracterizan completamente un plan óptimo de dos períodos para el que el stock inicial y final es y_t. Así, la sucesión de estado generada por el mecanismo es precisamente la secuencia de estados generada por la revisión continua planificada de planes óptimos de dos períodos con conjuntos de stocks inicial y final iguales entre sí. Como un programa generado por este procedimiento de revisión planificada es eficiente y maximiza la utilidad media a largo plazo, también es así para las sucesiones de estados y asignaciones generadas por este mecanismo.

IX. Notas bibliográficas.

El esbozo de la teoría del mecanismo de la Sección II está basado en Hurwicz (1986), una excelente revisión de una serie de aspectos de la literatura acerca del diseño de mecanismos. Menos técnicas y menos formales son las revisiones de Hurwicz (1973) y Reiter (1986), aunque también son clarificadoras. Los resultados de la Sección III son bien conocidos para los especialistas, si bien están algo dispersos. Muchos de los resultados han sido probados en modelos multisectoriales. Sobre la necesidad de la condición de transversalidad (IF), véase Majumdar-Mitra-McFadden 1(986) y Mitra-Majumdar (1976). Para referencias de la literatura sobre programas que son óptimos en el sentido de (3.14), véase las revisiones de Cass-Majumdar (1979) y Mckenzie (1986). Se puede hacer caso omiso para la mayoría de los resultados de la condición de que u es continua en $\mathbb{R}_+$, y las funciones de felicidad como $u(c) = \log c$ pueden ser manejadas. Especificamente, Majumdar (1988) o Hurwicz-Majumdar (1988) tienen en cuenta esas funciones de felicidad. Para extensiones multisectoriales de la proposición 4.2 en los casos discontinuos y no discontinuos, véase Dasgupta y Mitra (1988a) y Brock y Majumdar (1988).

Hurwicz y Majumdar (1988) también recogen algunos resultados donde la función de producción f es lineal, es decir, $f(x) = \rho x$ para $\rho > 0$. Dasgupta y Mitra (1988b) consideran una clase de modelos multisectoriales lineales y estudian la posibilidad de caracterizar programas óptimos en términos de condiciones «período a período». Nyarko (1988) estudia el mismo problema para el caso no discontinuo con una tecnología estocástica. Los resultados presentados en la Sección V son nuevos. La Sección VII está adaptada de Hurwicz y Majumdar (1988). La Sección VIII está adaptada de Bala, Majumdar y Mitra (1990).

Bibliografía

ARROW, K. J., y HAHN, F. (1971): *General Competitive Analysis*, Holden Day, San Francisco, California.

BALA, V., y MAJUMDAR, M. (1990): *Chaotic Tatonnement, Working Paper 430*, Department of Economics, Cornell University, Ithaca, Nueva York.

BALA, V.; MAJUMDAR, M., y MITRA, T. (1990): *Decentralized Evolutionary Mechanisms for Intertemporal Economies*, mimeo, Department of Economics, Cornell University, Ithaca, Nueva York.

BROCK, W. A., y MAJUMDAR, M. (1988): «On Characterizing Optimal Competitive Programs in Terms of Decentralizable Conditions», *J. Econ. Theory*, 45, 262-273.

CASS, D., y MAJUMDAR, M. (1979): «Efficient Intertemporal Allocation, Consumption-Value Maximization, and Capital-Value Transversality: A Unified View», en *General Equilibrium, Growth and Trade* (eds. J. Green y J. Scheinkman), Academic Press.

DASGUPTA, S., y MITRA, T. (1988a): «Characterization of Intertemporal Optimality in Terms of Decentralizable Conditions: The Discounted Case», *J. Econ. Theory*, 45, 274-287.

DASGUPTA, S., y MITRA, T. (1988b): «Intertemporal Optimality in a Closed Linear Model of Production», *J. Econ. Theory*, 45, 288-315.

DEBREU, G. (1959): «Valuation Equilibrium and Pareto Optimum», *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States*, 40, 588-592.

FISHER, F. (1989): «Processes and Stability», en *The New Palgrave: A Dictionary of Economics* (General Equilibrium) (eds. J. Eatwell, M. Milgate y P. Newman), The Macmillan Press Ltd., Londres; pp. 36-43.

GALE, D. (1963): «A Note on the Global Instability of Competitive Equilibrium», *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 10.

GALE, D. (1967): «On Optimal Development in a Multi-Sector Economy», *Rev. Econ. Stud*, 34, 1-18.

HURWICZ, L. (1972): «On Informationally Decentralized Systems», en *Decision and Organization* (eds. C. McGuire y R. Radner), North Holland, Amsterdam.

HURWICZ, L. (1973): «The Design of Resource Allocation Mechanisms», *Amer. Econ. Rev.: Papers and Proceedings*, 58, 1-30.

HURWICZ, L. (1986): «On Informational Decentralization and Efficiency in Resource Allocation Mechanisms», en *Studies in Mathematical Economics* (eds., S. Reiter), MAA Studies in mathematics, vol. 25, *The Mathematical Association of America*, pp. 238-350.

HURWICZ, L., y MAJUMDAR, M. (1988): «Optimal Intertemporal Allocation Mechanisms and Decentralization of Decisions», *J. Econ. Theory*, 45, 228-261.

HURWICZ, L., y WEINBERGER, H. (1990): «A Necessary Condition for Decentralization and an Application to Intertemporal Allocation», *J. of Econ. Theory*, 51, 313-345.

KOOPMANS, T. C. (1957): *Three Essays on the State of Economic Science*, McGraw-Hill, Nueva York.

KURZ, M., y STARRETT, D. (1970): «On the Efficiency of Competitive Programs in an Infinite Horizon Model», *Rev. Econ. Stud.*, 38, 571-589.

MAJUMDAR, M. (1970): «Some Approximation Theorems on Efficiency Prices for Infinite Programs», *J. Econ. Theory*, 2, 399-410.

MAJUMDAR, M. (1987): *Optimal Intertemporal Allocation Mechanisms and Decentralization: The Undiscounted Case, Working Paper #393*, Department of Economics, Cornell University, Ithaca, New York.

MAJUMDAR, M. (1988): «Decentralization in Infinite Horizon Economies: An Introduction», *J. Econ. Theory*, 45, 217-227.

MAJUMDAR, M.; MITRA, T., McFADDEN, D. (1976): «Efficiency and Pareto Optimality of Competitive Equilibrium in Closed Multisector Models», *J. Econ. Theory*, 7, 1-26.

MAJUMDAR, M.; MITRA, T., y NYARKO, Y. (1989): «Dynamic Optimization Under Uncertainty: Non-convex Feasible Set», en *Joan Robinson and Modern Economic Theory* (ed. George Feiwel), Nueva York, University Press.

MALINVAUD, E. (1953): «Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources», *Econometrica*, 21, 233-268.

MALINVAUD, E. (1961): «The Analogy Between Atemporal and Intertemporal Theories of Resource Allocation», *Rev. Econ. Stud.*, 28, 143-160.

MALINVAUD, E. (1987): «The Overlapping Generations Model in 1947», *J. Econ. Lit.*, 25, 103-105.

McFADDEN, D. (1975): «An Example of the Non-existence of Malinvaud Prices in a Tight Economy», *J. Math. Econ.*, 2, 17-19.

McKENZIE, L. W. (1986): «Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics», en *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 3 (eds. K. J. Arrow and M. D. Intrilligator), North Holland, Amsterdam, pp. 1281-355.

MITRA, T., y MAJUMDAR, M. (1976): «A Note on the Role of the Transversality Condition in Signalling Capital Overaccumulation», *J. Econ. Theory*, 13, 47-56.

MITRA, T. (1979): «On Optimal Economic Growth with Variable Discount Rates», *Int. Econ. Rev.*, 20, 133-145.

MOUNT, J., y REITER, S. (1974): «The Informational Size of Message Spaces», *J. Econ. Theory*, 8, 161-192.

MUKHERJI, A. (1990): *Walrasian and Non-Walrasian Equilibria*, Claredon Press, Oxford.

NYARKO, Y. (1988): «On Characterizing Optimality of Stochastic Competitive Processes», *J. Econ. Theory*, 45, 316-329.

RADNER, R. (1967): «Efficiency Prices for Infinite Horizon Production Programmes», *Rev. Econ. Stud.*, 34, 1-66.

RADNER, R. (1972): «Normative Theories of Organization: An Introduction», en *Decision and Organization* (eds. C. B. McGuire y R. Radner), North Holland, Amsterdam.

RADNER, R. (1970): «Problems in the Theory of Markets Under Uncertainty», *Amer. Econ. Rev.: Papers and Proceedings*, pp. 454-460.

REITER, S. (1986): «Informational Performance in the (New)^2 Welfare Economics», en *Stud. Math. Econ.* (ed. S. Reiter), vol. 25, MAA Studies in Mathematics, Mathematical Association of America.

REITER, S. (1989): «Decentralized Dynamic Processes for Finding Equilibrium», *Discussion Paper No. 865*, The Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University, Evanston.

SAMUELSON, P. A. (1958): «An Exact Consumption Loan Model of Interest With or Without Social Contrivance of Money», *J. Polit. Econ.*, 66, 467-482.

SCARF, H. (1960): «Some Examples of Global Instability of Competitive Equilibrium», *Int. Econ. Rev.*, 1.

STARRETT, D. (1968): «Contributions to the Theory of Capital in Infinite Horizon Models», *Technical Report*, No. 16, IMSSS, Stanford University.

ZILCHA, I. 1(976): «Characterization of Prices of Optimal Programs Under Uncertainty», *J. Math. Econ.*, 3, 173-183.

ZILCHA, I. (1978): «Transversality Condition in a Multi-Sector Economy Under Uncertainty», *Econometrica*, 44, 515-525.